ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ Γ. Ε. Λ.
ΔΕΥΤΕΡΑ 18 ΜΑΙΟΥ 2009
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
(απαντήσεις)

ΘΕΜΑ 1ο

Α. βλ. σχολικό βιβλίο σελ. 150

Β. βλ. σχολικό βιβλίο σελ. 65

Γ. α) Λ **β)** Σ **γ)** Λ **δ)** Σ **ε)** Σ

ΘΕΜΑ 2ο

α) ισχύει :

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{4} v_i x_i}{v} \Leftrightarrow \bar{x} = \frac{v_1x_1 + v_2x_2 + v_3x_3 + v_4x_4}{6 + v_2 + 3 + 4}$$

$$\Leftrightarrow 4 = \frac{2\cdot 6 + 3\cdot v_2 + 5\cdot 3 + 8\cdot 4}{6 + v_2 + 3 + 4}$$

$$\Leftrightarrow 4 = \frac{12 + 3\cdot v_2 + 15 + 32}{13 + v_2}$$

$$\Leftrightarrow 52 + 4v_2 = 59 + 3v_2$$

Άρα $v_2 = 7$.

β) ισχύει :

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{4} v_i\left(x_i - \bar{x}\right)^2}{v} = \frac{v_1\left(x_1-\bar{x}\right)^2 + v_2\left(x_2-\bar{x}\right)^2 + v_3\left(x_3-\bar{x}\right)^2 + v_4\left(x_4-\bar{x}\right)^2}{v}$$

$$= \frac{6(2-4)^2 + 7(3-4)^2 + 3(5-4)^2 + 4(8-4)^2}{6+7+3+4}$$

$$= \frac{24+7+3+64}{20} = 4.9$$

γ) Ο *συντελεστής μεταβλητότητας* (CV) είναι :

$$CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{\sqrt{s^2}}{\bar{x}} = \frac{\sqrt{4.9}}{4} \approx \frac{2.2}{4} = 0.55 \text{ ή } 55\%$$

Επομένως το δείγμα χαρακτηρίζεται *ανομοιογενές.*

ΘΕΜΑ 3ο

α) είναι $A_f = IR$ (f(x) πολυωνυμική)
η f δυο φορές παραγωγίσιμη (ως πολυωνυμική) , με

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + \alpha$$
$$f''(x) = 6x - 12$$

Επομένως

$$\begin{aligned} 2f''(x) + f'(x) + 15 = 3x^2 &\Leftrightarrow 2(6x - 12) + 3x^2 - 12x + \alpha + 15 = 3x^2 \\ &\Leftrightarrow 12x - 24 - 12x + \alpha + 15 = 0 \\ &\Leftrightarrow \alpha = 9 \end{aligned}$$

β) για $x \neq \pm 1$, είναι :

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1} \frac{f'(x)}{x^2 - 1} &= \lim_{x\to 1} \frac{3x^2 - 12x + 9}{x^2 - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{3(x^2 - 4x + 3)}{(x-1)(x+1)} \\ &= \lim_{x\to 1} \frac{3(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{3x - 9}{x + 1} = \frac{3\cdot 1 - 9}{1 + 1} = -3 \end{aligned}$$

γ) έστω $A\ x\ ,f(x$

$$\varepsilon\varphi \,//\, y = -3x \Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon\varphi} = -3 \Leftrightarrow f'(x_o) = -3$$

Άρα

$$\begin{aligned} 3x_o^2 - 12x_o + 9 = -3 &\Leftrightarrow 3x_o^2 - 12x_o + 12 = 0 \\ &\Leftrightarrow x_o^2 - 4x_o + 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x_o - 2)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x_o = 2 \end{aligned}$$

Σημείο επαφής το $A(2, f(2)) = (2, -5)$.

Η εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας είναι : $y = f'(2)x + \beta = -3x + \beta$
και $A(2,-5) \in$ εφ. $\Leftrightarrow -5 = -3\cdot 2 + \beta \Leftrightarrow \beta = 1$.

ΘΕΜΑ 4ο

Α. α. είναι $f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{2}=\frac{2-x}{2x}$ και για $x>0$ είναι :

$$f'(x)>0\Leftrightarrow\frac{2-x}{2x}>0\Leftrightarrow\ 0<x<2\quad\text{και}\quad f'(x)<0\Leftrightarrow\ x>2$$

Επομένως η f είναι *γνησίως αύξουσα* στο διάστημα $(0\,,2]$ και *γνησίως φθίνουσα* στο διάστημα $[2\,,+\infty)$.

β. <u>πιθανά</u> ακρότατα θα έχουμε εκεί όπου :

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{2-x}{2x}=0\Leftrightarrow\ x=2$$

και <u>εκατέρωθεν του σημείου αλλάζει το πρόσημο της f ’</u> , επομένως η f παρουσιάζει μέγιστη τιμή (σύμφωνα με το πρόσημο της f ’) την

$$f(2)=\ln 2+\lambda^2-6\lambda+1\,.$$

Β. α. επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[2\,,+\infty)$ ισχύει :

$$2<3<4<5<8\Leftrightarrow f(2)>f(3)>f(4)>f(5)>f(8)$$

Άρα το *εύρος των παρατηρήσεων* είναι :

$$R=f(2)-f(8)=(\ln 2+\lambda^2-6\lambda+1)-(\ln 8+\lambda^2-6\lambda-2)=\ln\frac{1}{4}+3$$

Για τη *διάμεσο* , με δεδομένο ότι έχουμε πέντε παρατηρήσεις :

$$\delta=f(4)=\ln 4+\lambda^2-6\lambda$$

β. είναι

$$A=\left\{\lambda\in\Omega\,/\,3+\ln\frac{1}{4}+\ln 4+\lambda^2-6\lambda<-2\right\}=\left\{\lambda\in\Omega\,/\,\lambda^2-6\lambda+5<0\right\}$$

και

$$\lambda^2-6\lambda+5<0\Leftrightarrow\lambda\in(1,5)\quad\text{και}\quad\lambda\in\Omega$$

άρα

$$A\{2,3,4\}\quad\text{και}\quad P(A)=\frac{N(A)}{N(\Omega)}=\frac{3}{100}=0.03\ .$$