

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

- A. Θεωρία
 B. Θεωρία
 Γ. $\alpha \rightarrow \Sigma$ $\beta \rightarrow \Sigma$ $\gamma \rightarrow \Lambda$ $\delta \rightarrow \Lambda$ $\epsilon \rightarrow \Lambda$

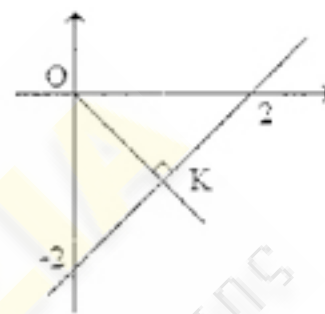
ΘΕΜΑ 2^ο

- A. α. Έστω $z = x + yi$, τότε: $\left. \begin{matrix} 2\lambda + 1 = x \\ 2\lambda - 1 = y \end{matrix} \right\} \begin{matrix} (-) \\ (+) \end{matrix} \Rightarrow x - y = 2$ δηλαδή οι εικόνες των

μιγαδικών αριθμών z βρίσκονται στην ευθεία $\epsilon : y = x - 2$.

- β. Ο ζητούμενος μιγαδικός z έχει εικόνα το σημείο K της (ϵ) ώστε $OK \perp \epsilon \Leftrightarrow \lambda_{OK} \lambda_{\epsilon} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{OK} = -1$
 επομένως $OK : y = -x$

- .. $\left. \begin{matrix} y = -x \\ y = x - 2 \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{matrix} x = 1 \\ y = -1 \end{matrix} \right.$ επομένως $K(1, -1)$ δηλαδή
 ελάχιστο μέτρο έχει ο μιγαδικός $z_0 = 1 - i$.



- B. Έστω $w = x + yi$, τότε: $|w|^2 + \bar{w} - 12 = z_0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + x - yi - 12 = 1 - i \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \left\{ \begin{matrix} x^2 + y^2 + x - 12 = 1 \\ -y = -1 \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{matrix} x^2 + 1 + x = 13 \\ y = 1 \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{matrix} x^2 + x - 12 = 0 \\ y = 1 \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \left\{ \begin{matrix} x = -4, y = 1 \\ x = 3, y = 1 \end{matrix} \right.$ δηλαδή $w = -4 + i$ ή $w = 3 + i$.

ΘΕΜΑ 3^ο

- A. $f(x) \geq 1 \Leftrightarrow f(x) \geq f(0)$, για κάθε $x > -1$, επομένως η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 0$ και επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-1, +\infty)$ με $f'(x) = a^x \ln a - \frac{1}{x+1}$ από το θεώρημα Fermat: $f'(0) = 1 \Leftrightarrow \ln a - 1 = 0 \Leftrightarrow a = e$.

- B. Για $a = e$ τότε $f(x) = e^x - \ln(x+1)$.

- α. f δυο φορές παραγωγίσιμη στο $(-1, +\infty)$ με $f'(x) = e^x - \frac{1}{x+1}$,

$$f''(x) = e^x + \frac{1}{(x+1)^2} > 0 \text{ για κάθε } x > -1 \text{ άρα η } f \text{ είναι κυρτή.}$$

- β. $f'(x) = \frac{e^x(x+1)-1}{x+1}$, έστω $g(x) = e^x(x+1)-1$, g παραγωγίσιμη στο $(-1, +\infty)$

$g'(x) = e^x(x+2) > 0$, επομένως g γνησίως αύξουσα στο $(-1, +\infty)$ και $g(0) = 0$
 για κάθε $x < 0 \Rightarrow g(x) < g(0) \Rightarrow f'(x) < 0$ δηλαδή f γν. φθίνουσα στο $(-1, 0]$
 για κάθε $x > 0 \Rightarrow g(x) > g(0) \Rightarrow f'(x) > 0$ δηλαδή f γν. αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

- γ. Από Ββ προκύπτει ότι η f έχει ελάχιστο στο $x_0 = 0$ το $f(0) = 1$ και επειδή $\beta, \gamma \neq 0$, τότε $f(\beta), f(\gamma) > 1$. Έστω $h(x) = (f(\beta) - 1)(x - 2) + (f(\gamma) - 1)(x - 1)$, που είναι συνεχής στο $[1, 2]$ ως πολυωνυμική και $h(1) = -(f(\beta) - 1) < 0$, $h(2) = f(\gamma) - 1 > 0$ από το θεώρημα του Bolzano εξίσωση $h(x) = 0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow \frac{f(\beta) - 1}{x - 1} + \frac{f(\gamma) - 1}{x - 2} = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(1, 2)$.

ΘΕΜΑ 4^ο

- α. Επειδή f συνεχής στο $[0, 2]$, τότε $\int_0^x f(t) dt$ παραγωγίσιμη στο $[0, 2]$ άρα και στο $(0, 2]$, ομοίως H συνεχής στο $(0, 2]$ και $\frac{H(x)}{x}$ συνεχής ως πηλίκο συνεχών άρα G συνεχής στο $(0, 2]$ ως αλγεβρικό άθροισμα συνεχών.

$$G(0) = 6 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 - t^2}}{t^2} = 6 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \sqrt{1 - t^2}} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{H(x)}{x} = \left(\frac{0}{0} \right)^{\text{d'H}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{H'(x)}{x'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (xf(x)) = 0f(0) = 0$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow 0^+} G(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{H(x)}{x} - \int_0^x f(t) dt + 3 \right) = 0 - 0 + 3 = 3 = G(0)$$

$$\left(\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_0^x f(t) dt = 0 \text{ αφού η συνάρτηση } \int_0^x f(t) dt \text{ είναι συνεχής ως παρ/μη} \right)$$

Επομένως η G είναι συνεχής στο $[0, 2]$.

- β. Η G είναι παρ/μη στο $(0, 2)$ ως αλγεβρικό άθροισμα παρ/μων με

$$G'(x) = \left(\frac{H(x)}{x} \right)' - f(x) = \frac{H'(x)x - H(x)}{x^2} - f(x) = \frac{x^2 f(x) - H(x)}{x^2} - f(x) = -\frac{H(x)}{x^2}$$

- γ. G συνεχής στο $[0, 2]$, παρ/μη στο $(0, 2)$ και $G(0) = 3$, $G(2) = \frac{H(2)}{2} - \int_0^2 f(t) dt + 3 = \frac{H(2) - 2 \int_0^2 f(t) dt}{2} + 3 = \frac{\int_0^2 tf(t) dt - 2 \int_0^2 f(t) dt}{2} + 3 = \frac{\int_0^2 (t - 2)f(t) dt}{2} + 3 = 3$, επομένως

$$\text{από θεώρημα Rolle υπάρχει } \alpha \in (0, 2) \text{ ώστε } H'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow -\frac{H(\alpha)}{\alpha^2} = 0 \Leftrightarrow H(\alpha) = 0.$$

- δ. Η G είναι συνεχής στο $[0, a]$ παραγωγίσιμη στο $(0, a)$ επομένως από το Θ.Μ.Τ υπάρχει $\xi \in (0, a)$ ώστε:

$$G'(\xi) = \frac{G(a) - G(0)}{a - 0} \Leftrightarrow -\frac{H(\xi)}{\xi^2} = \frac{-\int_0^a f(t) dt + 3 - 3}{a} \Leftrightarrow a \int_0^\xi tf(t) dt = \xi^2 \int_0^a f(t) dt.$$