

## ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ 2010

### ΘΕΜΑ Α

A1) Θεώρημα στη σελίδα 304 του σχολικού βιβλίου.

A2) Ορισμός στη σελίδα 279 του σχολικού βιβλίου.

A3) Ορισμός στη σελίδα 273 του σχολικού βιβλίου.

A4)  $\alpha \rightarrow \Sigma$

$\beta \rightarrow \Sigma$

$\gamma \rightarrow \Lambda$

$\delta \rightarrow \Lambda$

$\varepsilon \rightarrow \Sigma$

### ΘΕΜΑ Β

B1. Έχουμε:  $z + \frac{2}{z} = 2 \Leftrightarrow z^2 - 2z + 2 = 0$ . Άρα:  $z_1 = \frac{2-2i}{2} = 1-i$ ,  $z_2 = \frac{2+2i}{2} = 1+i$ .

B2. Έχουμε:  $(1-i)^{2010} + (1+i)^{2010} = (1-i)^{2010} + [i(1-i)]^{2010} =$   
 $= (1-i)^{2010} + i^{2010} \cdot (1-i)^{2010} = (1-i)^{2010} \cdot (1+i^{2010}) =$   
 $= (1-i)^{2010} \cdot (1-1) = 0$ .

B3. Έχουμε:  $|w - 4 + 3i| = |z_1 - z_2| \Leftrightarrow |w - 4 + 3i| = |1-i-1-i| \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |w - 4 + 3i| = |-2i| = 2$ . Έστω ότι ο  $w$  είναι της μορφής:  $w = x + yi$  τότε θα ισχύει:

$|x + yi - 4 + 3i| = 2 \Leftrightarrow |(x-4) + (y+3)i| = 2 \Leftrightarrow (x-4)^2 + (y+3)^2 = 4$ . Άρα, ο

γεωμετρικός τόπος των εικόνων των  $w$  στο μιγαδικό επίπεδο είναι ο κύκλος με κέντρο το  $K(4, -3)$  και ακτίνα  $\rho = 2$ .

B4. Έχουμε:  $|w| = |w + (-4 + 3i) - (-4 + 3i)|$  τώρα από *τριγωνική ανισότητα* έχουμε:

$$\begin{aligned} & \left| |w + (-4 + 3i)| - |-4 + 3i| \right| \leq |w + (-4 + 3i) - (-4 + 3i)| \leq |w + (-4 + 3i)| + \\ & |-4 + 3i| \Rightarrow \left| |z_1 - z_2| - 4 + 3i \right| \leq |w| \leq |z_1 - z_2| + |-4 + 3i| \Rightarrow |2 - 5| \leq |w| \leq 2 + 5 \Rightarrow \\ & \Rightarrow 3 \leq |w| \leq 7 . \end{aligned}$$

### ΘΕΜΑ Γ

Έχουμε  $f(x) = 2x + \ln(x^2 + 1)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

Γ1. Η  $f$  είναι συνεχής ως πράξη συνεχών συναρτήσεων στο  $\mathbb{R}$ .

Η  $f$  είναι παραγωγίσιμη ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο  $\mathbb{R}$  με παράγωγο:

$$f'(x) = 2 + \frac{1}{x^2 + 1}(x^2 + 1)' = 2 + \frac{2x}{x^2 + 1} = \frac{2x^2 + 2x + 2}{x^2 + 1} = \frac{2(x^2 + x + 1)}{x^2 + 1}$$

Και επειδή  $x^2 + x + 1 > 0$  και  $x^2 + 1 > 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(x) > 0$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow f$  γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ .

Γ2. Έχουμε:  $2(x^2 - 3x + 2) = \ln \left[ \frac{(3x-2)^2 + 1}{x^4 + 1} \right] \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2(x^2 - 3x + 2) = \ln[(3x - 2)^2 + 1] - \ln(x^4 + 1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 2(3x - 2) = \ln[(3x - 2)^2 + 1] - \ln(x^4 + 1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + \ln(x^4 + 1) = \ln[(3x - 2)^2 + 1] + 2(3x - 2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + \ln(x^4 + 1) = 2(3x - 2) + \ln[(3x - 2)^2 + 1]. \text{ Παρατηρούμε ότι:}$$

$$2x^2 + \ln(x^4 + 1) = 2(3x - 2) + \ln[(3x - 2)^2 + 1] \Leftrightarrow f(x^2) = f(3x - 2)$$

Επειδή τώρα η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Π.Ο. της  $\Rightarrow f$  θα είναι "1 - 1" και άρα:

$$x^2 = 3x - 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0. \text{ Δηλαδή, } x = 1 \text{ ή } x = 2.$$

Γ3. Έχουμε:  $f''(x) = \left( 2 + \frac{2x}{x^2 + 1} \right)' = 2 \left( \frac{x}{x^2 + 1} \right)' = 2 \frac{x'(x^2 + 1) - x(x^2 + 1)'}{(x^2 + 1)^2} = 2 \frac{x^2 + 1 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2(1 - x^2)}{(x^2 + 1)^2}$

Για  $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$  ή  $x = 1$ , ενώ ισχύει ότι  $f''(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-1, 1)$  και

$$f''(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty).$$

Βλέπουμε ότι όντως η  $C_f$  έχει 2 σημεία καμπής στα σημεία  $x_1 = -1$  και  $x_2 = 1$ .

➤ Η εφαπτομένη της  $C_f$  στο  $x_1 = -1$  έχει εξίσωση:

$$(\varepsilon_1): y - f(-1) = f'(-1)(x + 1) \Leftrightarrow y - (-2 + \ln 2) = 1(x + 1) \Leftrightarrow y = x + \ln 2$$

➤ Η εφαπτομένη της  $C_f$  στο  $x_2 = 1$  έχει εξίσωση:

$$(\varepsilon_2): y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Leftrightarrow y - (2 + \ln 2) = 3(x - 1) \Leftrightarrow y = 3x - 1 + \ln 2$$

Παρατηρούμε ότι για  $x = 0$  οι  $(\varepsilon_1)$  και  $(\varepsilon_2)$  τέμνονται στο σημείο  $M(0, \ln 2 - 1)$  του άξονα  $y'y$ .

$$\Gamma 4. \text{ Έχουμε: } I = \int_{-1}^1 x f(x) dx = \int_{-1}^1 (2x^2 + x \ln(x^2 + 1)) dx =$$

$$= 2 \int_{-1}^1 x^2 dx + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (x^2 + 1)' \ln(x^2 + 1) dx =$$

$$= 2 \int_{-1}^1 x^2 dx + \frac{1}{2} [(x^2 + 1) \ln(x^2 + 1)]_{-1}^1 - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (x^2 + 1) [\ln(x^2 + 1)]' dx =$$

$$= 2 \int_{-1}^1 x^2 dx + \frac{1}{2} [(x^2 + 1) \ln(x^2 + 1)]_{-1}^1 - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (x^2 + 1) \frac{2x}{x^2 + 1} dx =$$

$$= 2 \left[ \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 + \frac{1}{2} \cdot 0 - \frac{1}{2} [x^2]_{-1}^1 = 2 \frac{2}{3} - \frac{1}{2} (1 - 1) = \frac{4}{3}$$

#### ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η συνάρτηση  $g(t) = \frac{t}{f(t)-t}$  είναι:

➤ ορισμένη σε όλο το  $\mathbb{R}$  αφού  $f(t) \neq t$  για κάθε  $t \in \mathbb{R}$ , και

➤ συνεχής σε όλο το  $\mathbb{R}$  ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων.

Έτσι η συνάρτηση  $f(x) = \int_0^x g(t) dt + x + 3$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ , με

$$f'(x) = g(x) + 1 = \frac{x}{f(x) - x} + 1 = \frac{x + f(x) - x}{f(x) - x} = \frac{f(x)}{f(x) - x}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Δ2. Έχουμε:  $g'(x) = [(f(x))^2 - 2x \cdot f(x)] = 2f(x) \cdot f'(x) - 2f(x) - 2x \cdot f'(x) =$

$$= 2f'(x)(f(x) - x) - 2f(x) = 2 \frac{f(x)}{f(x) - x} (f(x) - x) - 2f(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

Δ3. Έχουμε  $f(0) = 0 + 3 + \int_0^0 \frac{t}{f(t)-t} dt = 3$

Λόγω του Δ2 είναι  $(f(x))^2 - 2x \cdot f(x) = c$ ,  $c \in \mathbb{R}$ .

Για  $x = 0$  προκύπτει ότι  $c = (f(0))^2 - 2 \cdot 0 \cdot f(0) = 9$

Έτσι

$$(f(x))^2 - 2x \cdot f(x) = 0 \Leftrightarrow (f(x))^2 - 2x \cdot f(x) + x^2 = x^2 + 9 \Leftrightarrow (f(x) - x)^2 = x^2 + 9$$

Αν τώρα, θέσουμε  $h(x) = f(x) - x$  έχουμε ότι η συνάρτηση  $h$  είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$  και  $h(x) \neq 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , αφού  $f(x) \neq x$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

Άρα η  $h$  διατηρεί σταθερό πρόσημο στο  $\mathbb{R}$ . Δηλαδή  $h(x) > 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ή  $h(x) < 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

Όμως  $h(0) = f(0) - 0 = 3 > 0$  άρα  $h(x) > 0$  και  $f(x) > x$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι:

$$|f(x) - x| = \sqrt{x^2 + 9} \Leftrightarrow f(x) - x = \sqrt{x^2 + 9} \Leftrightarrow f(x) = x + \sqrt{x^2 + 9}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Δ4. Έστω  $F(x) = \int_x^{x+1} f(t) dt$ ,  $x \in \mathbb{R}$

Έχουμε:  $F(x) = \int_c^{x+1} f(t) dt - \int_c^x f(t) dt$ ,  $x, c \in \mathbb{R}$

και  $F'(x) = f(x+1) - f(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$

$$\text{Όμως } f'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} = \frac{\sqrt{x^2+9}+x}{\sqrt{x^2+9}} > \frac{\sqrt{x^2+x}}{\sqrt{x^2+9}} = \frac{|x|+x}{\sqrt{x^2+9}} \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

Δηλαδή  $f'(x) > 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , άρα η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$

Προκύπτει έτσι:  $x < x+1 \Rightarrow f(x) < f(x+1) \Rightarrow f(x+1) - f(x) > 0$ ,  $x \in \mathbb{R}$

Λόγω των παραπάνω και η  $F$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ .

Επομένως:  $x < x+1 \Leftrightarrow F(x) < F(x+1) \Leftrightarrow \int_x^{x+1} f(t) dt < \int_{x+1}^{x+2} f(t) dt$ .