ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ Γ. Ε. Λ.
ΔΕΥΤΕΡΑ 17 ΜΑΙΟΥ 2010
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
(απαντήσεις)

ΘΕΜΑ Α

Α1. ο ζητούμενος *αριθμητικός μέσος* είναι :

$$\frac{\left(t_1-\bar{x}\right)+\left(t_2-\bar{x}\right)+\ldots+\left(t_v-\bar{x}\right)}{v}=\frac{\left(t_1+t_2+\ldots+t_v\right)-v\bar{x}}{v}=\frac{\left(t_1+t_2+\ldots+t_v\right)}{v}-\bar{x}=\bar{x}-\bar{x}=0$$

Α2. βλ. σχολικό βιβλίο σελ. 86 – 87

Α3. βλ. σχολικό βιβλίο σελ. 140

Α4. **α)** Σ **β)** Λ **γ)** Σ **δ)** Λ **ε)** Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1. για $x \neq 1$ έχουμε :

$$\frac{f(x)-1}{x-1}=\frac{2\sqrt{x^2-x+1}-1-1}{x-1}=\frac{2\sqrt{x^2-x+1}-2}{x-1}=\frac{2\left(\sqrt{x^2-x+1}-1\right)}{x-1}=$$

$$=\frac{2\left(\sqrt{x^2-x+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2-x+1}+1\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x^2-x+1}+1\right)}=\frac{2\left(x^2-x+1-1\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x^2-x+1}+1\right)}=$$

$$=\frac{2\left(x^2-x\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x^2-x+1}+1\right)}=\frac{2x(x-1)}{(x-1)\left(\sqrt{x^2-x+1}+1\right)}=\frac{2x}{\left(\sqrt{x^2-x+1}+1\right)}$$

Επομένως

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{2x}{\left(\sqrt{x^2-x+1}+1\right)}=\frac{2\cdot 1}{\left(\sqrt{1-1+1}+1\right)}=1$$

Β2. η f είναι παραγωγίσιμη στο IR και ισχύει :

$$f'(x)=2\frac{1}{2\sqrt{x^2-x+1}}\left(x^2-x+1\right)'=\frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x+1}}$$

Ο *συντελεστής διεύθυνσης* της εφαπτόμενης ευθείας στο σημείο Κ(0,f(0)) είναι : $\lambda = f'(0) = -1$.

Β3. Για τη γωνία ω της εφαπτόμενης ευθείας με τον άξονα x’x ισχύει :

$$\varepsilon\varphi\omega = f'(0) \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega = -1$$
$$\Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega = \varepsilon\varphi\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)$$
$$\Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega = \varepsilon\varphi\left(\frac{3\pi}{4}\right)$$

και δεδομένου ότι $\omega \in [0,\pi) \rightarrow \omega = \dfrac{3\pi}{4}$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Οι κλάσεις είναι της μορφής :$[0,c)$,$[c,2c)$,$[2c,3c)$...

Επειδή $x_2 = 6$ είναι το κέντρο της δεύτερης κλάσης , ισχύει :

$$\frac{c+2c}{2} = 6 \quad \Leftrightarrow \quad 3c = 12 \quad \Leftrightarrow \quad c = 4$$

Γ2.

	x_i	v_i	$x_i v_i$	x_i^2	$x_i^2 v_i$
$[0,4)$	2	20	40	4	80
$[4,8)$	6	40	240	36	1440
$[8,12)$	10	45	450	100	4500
$[12,16)$	14	30	420	196	5880
$[16,20)$	18	25	450	324	8100
Σύνολο	//////////	160	1600	//////////	20000

Για τη *μέση τιμή* ισχύει : $\bar{x} = \dfrac{1}{v}\sum_{i=1}^{k} x_i v_i = \dfrac{1}{160}\cdot 1600 = 10\text{kg}$

Για τη *διασπορά* ισχύει :

$$s^2 = \frac{1}{v}\left[\sum_{i=1}^{k} x_i^2 v_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^{k} x_i v_i\right)^2}{v}\right] = \frac{1}{v}\sum_{i=1}^{k} x_i^2 v_i - \left(\frac{1}{v}\sum_{i=1}^{k} x_i v_i\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{160}\sum_{i=1}^{k} x_i^2 \cdot v_i - \left(\bar{x}\right)^2 = \frac{1}{160}20000 - 100 = 25$$

Άρα η *τυπική απόκλιση* είναι $s = \sqrt{s^2} = 5kg$

Γ3. Ο *συντελεστής μεταβλητότητας* (CV) είναι :

$$CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{5}{10} = 0.5 \text{ ή } 50\%$$

Επομένως το δείγμα χαρακτηρίζεται *ανομοιογενές*.

Γ4. <u>Θεωρούμε ότι το δείγμα των ατόμων είναι ομοιόμορφα κατανεμημένο σε κάθε κλάση</u>. Επομένως αν στο διάστημα $[7,8) \subseteq [4,8)$ βρίσκονται k άτομα τότε

$$\frac{8-7}{8-4} = \frac{k}{v_2} \Leftrightarrow \frac{1}{4} = \frac{k}{40} \Leftrightarrow \quad k = 10 \ .$$

Όμοια αν στο διάστημα $[12,14) \subseteq [12,16)$ βρίσκονται m άτομα τότε

$$\frac{14-12}{16-12} = \frac{m}{v_4} \Leftrightarrow \frac{2}{4} = \frac{m}{30} \Leftrightarrow \quad m = 15 \ .$$

Επομένως στο διάστημα $[7,14]$, βρίσκονται :

$$10 + 45 + 15 = 70 \text{ άτομα}$$

Δηλαδή για το ενδεχόμενο Α ισχύει : $N(A) = 70$.

Επειδή κάθε άτομο έχει την ίδια πιθανότητα να επιλεγεί , από κλασσικό ορισμό πιθανότητας , για το ενδεχόμενο Α , έχουμε :

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{70}{160} = \frac{7}{16} \ .$$

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δ1. Η συνάρτηση f ορίζεται και είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(P(A), +\infty)$, με :

$$f'(x) = \frac{1}{x-P(A)} - \frac{1}{2} \cdot 2(x - P(A)) = \frac{1}{x-P(A)} - x + P(A)$$

<u>Πιθανά</u> ακρότατα θα παρουσιάζονται εκεί όπου :

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{x-P(A)}-x+P(A)=0$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{x-P(A)}=x-P(A)$$
$$\Leftrightarrow 1=(x-P(A))^2$$
$$\Leftrightarrow 1=(x-P(A)),\quad [x>P(A)]$$

άρα $x=P(A)+1$

Επιπλέον

$$f'(x)>0 \Leftrightarrow 1>(x-P(A))^2$$
$$\Leftrightarrow 1>(x-P(A)),\quad [x-P(A)>0]$$
$$\Leftrightarrow x<P(A)+1$$

Για τον πίνακα προσήμου της f ’ έχουμε :

x	P(A)	1+P(A)	$+\infty$
f '	+		−
f	↗	max P(B) - 1/2	↘

Η f γνησίως αύξουσα στο $(P(A),1+P(A)]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[1+P(A),+\infty)$. Παρουσιάζει μέγιστο στο $x_o=P(B)-\frac{1}{2}$.

Δ2. Από υπόθεση η f παρουσιάζει ακρότατο στο $x_o=\frac{5}{3}$ το $f(x_o)=0$.

$x_o=1+P(A)\Leftrightarrow \frac{5}{3}=1+P(A)\Leftrightarrow P(A)=\frac{2}{3}$ και

$f(x_o)=0\Leftrightarrow P(B)-\frac{1}{2}=0\Leftrightarrow P(B)=\frac{1}{2}$

Από τον *προσθετικό νόμο των πιθανοτήτων* ισχύει :

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{2}{3}+\frac{1}{2}-\frac{5}{6}=\frac{1}{3}\ .$$

Δ3. Το ενδεχόμενο να μην πραγματοποιηθούν ταυτόχρονα τα Α και Β είναι το $(A\cap B)'$., με πιθανότητα πραγμάτωσης :

$$P\left[(A\cap B)'\right]=1-P(A\cap B)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}\ .$$

Δ4. Το ενδεχόμενο να πραγματοποιηθεί μόνο ένα από τα Α και Β είναι το $(A-B)\cup(B-A)$ με πιθανότητα πραγματοποίησης :

$$\begin{aligned}P\left[(A-B)\cup(B-A)\right]&=P(A-B)+P(B-A),\quad \left[A-B\,,B-A \text{ ασυμβίβαστα}\right]\\&=P(A)-P(A\cap B)+P(B)-P(A\cap B)\\&=\frac{2}{3}+\frac{1}{2}-2\cdot\frac{1}{3}\\&=\frac{1}{2}\end{aligned}$$