ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ
(ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΔΕΥΤΕΡΑ 16 ΜΑΪΟΥ 2011
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1 σελ. 260
Α2 σελ. 280
Α3 α)Σ β) Σ γ) Λ δ) Λ ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

$|z-3i| + |\bar{z}+3i| = 2$

$w = z - 3i + \dfrac{1}{z-3i}$

Β1. $|z-3i| + |\overline{z-3i}| = 2 \Rightarrow$

$|z-3i| + |z-3i| = 2 \Rightarrow$

$2|z-3i| = 2 \Rightarrow |z-3i| = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow M(z) \in$ κύκλο με κ(0,3),Ρ=1

Β2. $\bar{z}+3i = \dfrac{1}{z-3i} \Leftrightarrow (\bar{z}+3i)(z-3i) = 1 \Leftrightarrow |z-3i|^2 = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |z-3i| = 1$ Ισχύει από το (α)

Β3. $w = z - 3i + \dfrac{1}{z-3i} \Rightarrow w = z - 3i + \bar{z}\,3i \Rightarrow$

$\Rightarrow w = z + \bar{z} \Rightarrow w = 2Re(z) \in \mathbb{R}$

Όμως το $-1 \le Re(z) \le 1$ αφού Μ (z) $\in$ στον κύκλο

με κ (0,3), ρ =1

Άρα $-2 \le 2Re(z) \le 2 \Rightarrow -2 \le w \le 2$

B4.

$$\left|z-w\right|=\left|z-(z+\overline{z})\right|=\left|z-z-\overline{z}\right|=\left|-\overline{z}\right|=\left|z\right|$$

ΘΕΜΑ Γ

F: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 2 φορές παραγωγίσιμη στο R με F'(0)=F(0)=0

$e^x(F'(x)+F''(x)-1)=F'(x)+xF''(x)$

Γ1.

$e^xF'(x)+e^xF''(x)-e^x=F'(x)+xF''(x)$

$(e^xF'(x))'-(e^x)'=(F'(x)x)'\Rightarrow$

$e^xF'(x)-e^x=F'(x)x+c$

Για $x=0$, $e^0F(0)-e^0=F'(0)0+C\Rightarrow C=-1$

άρα $e^xF'(x)-e^x=F'(x)x-1\Rightarrow$

$e^xF'(x)-F'(x)x=e^x-1$

$F'(x)(e^x-x)=e^x-1$

$F'(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x-x}\Rightarrow F'(x)=(\ln(e^x-x))'\Rightarrow$

$\Rightarrow F(x)=\ln(e^x-x)+C_1$

Για x=0 , $0=\ln(e^0-o)+C_1$

$0=0+C_1\Rightarrow 0$

άρα $F(x)=\ln(e^x-x)$

Γ2. $F''(x)=\dfrac{1}{e^x-x}(e^x-x)'\Rightarrow F'(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x-x}$

$F'(x)=0\Rightarrow e^x-1=0\Rightarrow e^x=e^0\Rightarrow x=0$

$F'(x)>0\Rightarrow\dfrac{e^x-1}{e^x-x}>0\Rightarrow e^x-1>0\Rightarrow x>0$

	$-\infty$	0	$+\infty$
F'(x)	-		+
F(x)	$\searrow$		$\nearrow$

ο.ε

Στο $\chi_0 = 0$ η F παρουσιάζει ολικό μέγιστο το F(0)=0

Άρα το ολικό ελάχιστο είναι (0,0)

Γ_3. $F''(x)=\dfrac{(e^x-1)'(e^x-x)-(e^x-x)'(e^x-1)}{(e^x-x)^2}=\dfrac{e^x(e^x-x)-(e^x-1)^2}{(e^x-x)^2}=$

$=\dfrac{2e^x-e^x x-1}{(e^x-x)^2}$

θεωρώ $h(x)=2e^x-e^x x-1$

$h'(x)=2e^x-e^x x-e^x=e^x(1-x)$

$h'(x)=0 \Rightarrow 1-x=0 \Rightarrow x=1$

$h'(x)>0 \Rightarrow 1-x>0 \Rightarrow x<1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
h'(x)	+		-
h(x)	$\nearrow$		$\searrow$

ολ.μ.

η h παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο 1 , το h(1)= 2e-e-1=e-1>0

Βρίσκω το Σ.Τ της h στο $(-\infty,1)$

$$\lim_{x\to-\infty}(2e^x - e^x x - 1) = -1 < 0$$

$$\lim_{x\to 1^-}(2e^x - e^x x - 1) = e - 1 > 0$$

Άρα το Σ.Τ στο $(-\infty,1)$ είναι το $(-1,e-1)$

και επειδή το 0 ανήκει στο Σ.Τ της h, η h έχει μια ακριβώς ρίζα P_1 στο $(-\infty,1)$.

Βρίσκω το Σ.Τ της h στο $(1,+\infty)$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^+}(2e^x-e^x-1)=e-1>0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty}(2e^x-e^x x-1)=\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x(2-x)-1)=-\infty\end{array}\right\} \Rightarrow$$

άρα το Σ.Τ στο $(1,+\infty)$ είναι $(-\infty,e-1)$

και επειδή το 0 ανήκει στο Σ.Τ της h έχει μια ακριβώς ρίζα P_2

στο$(1,+\infty)$.

info@synergasia.edu.gr
www.synergasia.edu.gr
2310 674555

Όμως επειδή η F στο $(-\infty,1)$ αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του P_1 με θετικό για μεγαλύτερο του P_1 και αρνητικό για μικρότερο του P_1

Ομοίως και για το P2, η F στο $(1+\infty)$ άρα αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του P_2 με θετικό για μικρότερο του P_2 και αρνητικό για μεγαλύτερο του P_2.

Άρα η h τέμνει τον $x'x$ σε 2 σημεία P_1, P_2 μόνο και εκατέρωθεν αυτών αλλάζει πρόσημο η h άρα η F έχει δύο ακριβώς σημεία καμπής.

Γ4. Θεωρώ: $g(x) = \ln(e^x - x) - \sigma\upsilon\nu x$

Θ.Β για την g στο $\left[0,\dfrac{\Pi}{2}\right]$

•Η g συνεχής στο $\left[0,\dfrac{\Pi}{2}\right]$ ως π.σ.σ.

$$\left.\begin{array}{l} \bullet g(0) = 0-\sigma\upsilon\nu 0=-1<0 \\ g(\frac{\Pi}{2}) = \ln(e^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\Pi}{2}) - 0 = \ln(e^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\Pi}{2}) > 0 \end{array}\right\} g(0)g(\frac{\Pi}{2}) < 0$$

γιατί η Fέχει ολ.ελάχιστο το (0,0).

Άρα σύμφωνα με το Θ.Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0,\frac{\Pi}{2})$:

$g(x_0) = 0 \Rightarrow \ln(e^{x_0} - x_0) = \sigma\upsilon\nu x_0$

Όμως $g'(x) = \dfrac{1}{e^x - x}(e^x - x) + \eta\mu x$

$= F'(x) + \eta\mu x$

$$\left.\begin{array}{l} F'(x)>0, \forall x>0 \\ \eta \text{ και } \eta\mu x>0, \forall x \in (0,\frac{\Pi}{2}) \end{array}\right\} \Rightarrow F'(x) + \eta\mu x > 0, \forall x \in (0,\frac{\Pi}{2})$$

άρα $g'(x)>0, \forall x \in (0,\frac{\Pi}{2})$

άρα η g $, \forall x \in (0,\frac{\Pi}{2})$

Συνεπώς το x_0 είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης

$\ln(e^x - x) = \sigma\upsilon\nu x$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $\frac{1-F(x)}{e^{2x}}=\int_0^{-x}\frac{e^{2t}}{g(x+t)}dt$

θέτω x+t=u $\Rightarrow$ dt=du

t=u-x

για t=0 , u=x

για t=-x , u=0

$\frac{1-F(x)}{e^{2x}}=\int_x^0\frac{e^{2u-2x}}{g^{(u)}}du\Rightarrow\frac{1-F(x)}{e^{2x}}=\frac{1}{e^{2x}}\int_x^0\frac{e^{2u}}{g^{(u)}}du\Rightarrow$

$\Rightarrow 1-F(x)=\int_x^0\frac{e^{2u}}{g^{(u)}}du\Rightarrow F(x)=1+\int_0^x\frac{e^{2u}}{g^{(u)}}du\Rightarrow$

όμως επειδή e^{2u} συνεχής
και g συνεχής $\Big\}\Rightarrow\frac{e^{2u}}{g^{(u)}}$ συνεχής άρα

το $\int_0^x\frac{e^{2u}}{g^{(u)}}du$ $\frac{1-g(x)}{e^{2x}}=\int_0^{-x}\frac{e^{2t}}{F(x+t)}dt$ παραγωγίσιμο άρα

και η F παραγωγ.συνάρτηση.

θέτω x+t=u $\Rightarrow$ dt=du

t=u-x

για t=0, u=x

για t=-x, u=0

$\frac{1-g(x)}{e^{2x}}=\int_x^0\frac{e^{2u-2x}}{F(u)}du\Rightarrow$

$\frac{1-g(x)}{}=-\frac{1}{}\int_x^0\frac{e^{2u}}{F(u)}du\Rightarrow g(x)=1+\int_0^x\frac{e^{2u}}{F(u)}du$

όμως επειδή e^{2u} συνεχής
και η F συνεχής $\Big\}\frac{e^{2u}}{F(u)}$ συνεχής

Άρα το $\int_0^x\frac{e^{2u}}{F(u)}du$ παραγωγ.

Συνεπώς η g παραγωγίσιμη συνάρτηση.

$$\left.\begin{aligned} F'(x)=\frac{e^{2x}}{g(x)} \\ g'(x)=\frac{e^{2x}}{F(x)} \end{aligned}\right\} \overset{(\div)}{\Rightarrow} \frac{F'(x)}{g'(x)}=\frac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{F(x)}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{F'(x)}{F(x)}=\frac{g'(x)}{g(x)} \Rightarrow (\ln F(x))'=(\ln g(x))' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln F(x)=\ln g(x)+c$$

για $x=0$, $\ln 1=\ln 1+c \Rightarrow c=0$

Άρα $\ln F(x)=\ln g(x) \Rightarrow F(x)=g(x)$

Δ2. Αν $F(x)=g(x) \Rightarrow F'(x)=\dfrac{e^{2x}}{F(x)} \Rightarrow F'(x)F(x)=e^{2x} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2F'(x)=2e^{2x} \Rightarrow (F^2(x))'=(e^{2x})' \Rightarrow$

$\Rightarrow F^2(x)=e^{2x}+c$

Για $x=0$: $1=1+C \Rightarrow C=0$

Άρα $F^2(x)=e^{2x} \overset{f(x)>0}{\Rightarrow} F(x)=e^x$

Δ3.

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\ln F(x)}{F(\frac{1}{x})}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\ln e^x}{e^{\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{e^{\frac{1}{x}}}$$

θέτω $\dfrac{1}{x}=u \to x=\dfrac{1}{u}$

όταν $x \to 0^- \Rightarrow u \to -\infty$

άρα $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\frac{1}{u}}{e^u} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{ue^u}$

όμως $\lim\limits_{x\to-\infty} ue^u = \lim\limits_{x\to-\infty} u\dfrac{1}{\frac{1}{e^u}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{u}{\frac{1}{e^u}} =$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{-\frac{1}{e^u}} = \lim\limits_{x\to-\infty} (-e^u) = 0$

άρα $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{ue^u} = -\infty$

Δ4. Αφού $F'(x) = f(x^2) > 0$

$\forall x \in \mathbb{R}$ άρα η F $\nearrow$, $\forall x \in \mathbb{R}$ όμως F(1)=0 άρα για χ<1, F(x)<0

$$E(\Omega) = -\int_0^1 \left(\int_1^x f(t^2)dt\right)dx = -\int_0^1 \left((x)'\int_1^x f(t^2)dt\right)dx =$$

$$= -\left[x\int_1^x f(t^2)dt\right]_0^1 + \int_0^1 x.f(x^2)dx = +\int_0^1 x.e^{x^2}dx$$

θέτω $e^{x^2} = u \Rightarrow 2xe^{x^2}dx = du \Rightarrow xe^{x^2}dx = \dfrac{1}{2}du$

για $x=0 \Rightarrow u=1$

$x=1 \Rightarrow u=e$

άρα $E(\Omega) = +\int_1^e \dfrac{1}{2}du = \dfrac{1}{2}[u]_1^e = \dfrac{1}{2}(e-1)$ τ.μ.