<u>ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ</u>

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ & ΕΠΑ.Λ. Β΄

28 ΜΑΪΟΥ 2012

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία, σελ. 253, σχολικού βιβλίου.
Α2. Θεωρία, σελ. 191, σχολικού βιβλίου.
Α3. Θεωρία, σελ. 258, σχολικού βιβλίου.
Α4. **α)** $\rightarrow$ Σ, **β)** $\rightarrow$ Σ, **γ)** $\rightarrow$ Λ, **δ)** $\rightarrow$ Λ, **ε)** $\rightarrow$ Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1. α΄ τρόπος: Αν $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$, η σχέση (1) γράφεται

$$|(x-1)+yi|^2+|(x+1)+yi|^2=4 \Leftrightarrow (x-1)^2+y^2+(x+1)^2+y^2=4 \Leftrightarrow x^2+y^2=1 .$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z στο επίπεδο είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho = 1$.

β΄ τρόπος: Η σχέση (1) γράφεται:

$$(z-1)\cdot\overline{(z-1)}+(z+1)\cdot\overline{(z+1)}=4 \Leftrightarrow (z-1)\cdot(\overline{z}-1)+(z+1)\cdot(\overline{z}+1)=4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z\cdot\overline{z}-z-\overline{z}+1+z\cdot\overline{z}+z+\overline{z}+1=4 \Leftrightarrow 2\cdot z\cdot\overline{z}=2 \Leftrightarrow z\cdot\overline{z}=1 \Leftrightarrow |z|^2=1 \Leftrightarrow |z|=1 .$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z στο επίπεδο είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho = 1$.

Β2. Έστω $|z_1+z_2|=x,\ x\geq 0$. Τότε

$$|z_1-z_2|=\sqrt{2} \Leftrightarrow |z_1-z_2|^2=2 \Leftrightarrow (z_1-z_2)\left(\overline{z_1-z_2}\right)=2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (z_1-z_2)\left(\overline{z}_1-\overline{z}_2\right)=2 \Leftrightarrow z_1\overline{z}_1+z_2\overline{z}_2-z_2\overline{z}_1-z_1\overline{z}_2=2 \Leftrightarrow$$

$$|z_1|^2+|z_2|^2-\left(z_2\overline{z}_1+z_1\overline{z}_2\right)=2 \quad (2\alpha)$$

$$|z_1+z_2|=x \Leftrightarrow |z_1+z_2|^2=x^2 \Leftrightarrow (z_1+z_2)\left(\overline{z_1+z_2}\right)=x^2 \Leftrightarrow$$

$$(z_1+z_2)\left(\overline{z}_1+\overline{z}_2\right)=x^2 \Leftrightarrow z_1\overline{z}_1+z_1\overline{z}_2+z_2\overline{z}_1+z_1\overline{z}_2=x^2 \Leftrightarrow$$

$$|z_1|^2+|z_2|^2+\left(z_2\overline{z}_1+z_1\overline{z}_2\right)=x^2 \quad (2\beta).$$

Προσθέτοντας τις (2α), (2β) κατά μέλη έχουμε:

$$2\left(|z_1|^2+|z_2|^2\right)=x^2+2.$$

Όμως $|z_1|=1$, $|z_2|=1$ οπότε προκύπτει $x^2+2=4 \Leftrightarrow x^2=2 \Leftrightarrow x=\sqrt{2}$, αφού $x\geq 0$.

Β3. $\left|w-5\overline{w}\right|=12 \Leftrightarrow \left|w-5\overline{w}\right|^2=12^2 \Leftrightarrow (w-5\overline{w})\cdot(\overline{w}-5w)=144 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow w\overline{w}-5w^2-5\overline{w}^2+25w\overline{w}=144 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |w|^2-5(w^2+\overline{w}^2)+25|w|^2=144 \Leftrightarrow 26|w|^2-5(w^2+\overline{w}^2)=144$ (3α)

Έστω $w=x+yi$, $x,y\in\mathbb{R}$ τότε η σχέση (3α) γίνεται:

$26(\sqrt{x^2+y^2})^2-5\left[(x+yi)^2+(x-yi)^2\right]=144 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 26(x^2+y^2)-5(x^2-y^2+2xyi+x^2-y^2-2xyi)=144 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 26x^2+26y^2-5(2x^2-2y^2)=144 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 26x^2+26y^2-10x^2+10y^2=144 \Leftrightarrow 16x^2+36y^2=144 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4x^2+9y^2=36 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{3^2}+\dfrac{y^2}{2^2}=1$.

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του w είναι η παραπάνω έλλειψη με μήκος μεγάλου ημιάξονα $a=3$ και μήκος μικρού ημιάξονα $\beta=2$.

Αν Α', Α, Β', Β οι κορυφές της έλλειψης, τότε:

Α' (-3,0), Α(3, 0), Β'(0, -2), Β(0, 2).

Είναι $|w|_{\max}=(OA)=(OA')=3$ και $|w|_{\min}=(OB)=(OB')=2$.

Β4. Με βάση την τριγωνική ανισότητα και επειδή $|z-w|=|w-z|$ έχουμε:

$\big||w|-|z|\big|\le|w-z|\le|w|+|z| \Leftrightarrow \big||w|-1\big|\le|w-z|\le|w|+1$ (1)

Όμως λόγω του B_3 είναι $2\le|w|\le3$, άρα:

$|w|-1\ge1$ και $|w|+1\le4$.

Τότε όμως η (1) γράφεται:

$1\le|w-z|\le4$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ ως αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη με $f'(x)=\ln x+\dfrac{x-1}{x}=\ln x+1-\dfrac{1}{x}$, $x\in(0\ +\infty)$.

- Όταν $x\in(0, 1)$ είναι $x<1$ και επειδή η συνάρτηση $\ln x$ είναι γνησίως αύξουσα έχουμε $\ln x<\ln 1 \Leftrightarrow \ln x<0$. Επίσης $x-1<0$ και $x>0$ άρα $\dfrac{x-1}{x}<0$.

  Έτσι $\ln x+\dfrac{x-1}{x}<0$ για κάθε $x\in(0, 1)$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, 1]$.

- Όταν $x\in(1, +\infty)$ είναι $x>1$ και επειδή lnx γνησίως αύξουσα είναι $\ln x>\ln 1 \Leftrightarrow \ln x>0$. Επίσης είναι $\dfrac{x-1}{x}>0$ για κάθε $x\in(1, +\infty)$, οπότε $\ln x+\dfrac{x-1}{x}>0$ για κάθε $x\in(1, +\infty)$. Δηλαδή $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(0, +\infty)$.

  Έτσι όμως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$.

Από τα προηγούμενα προκύπτει ο επόμενος πίνακας μεταβλητών για την f:

x	0		1		$+\infty$
f′	‖		0		
f	‖	↘	min (-1)	↗	

Επειδή f γνησίως φθίνουσα στο (0, 1] είναι $f\left((0,1]\right)=\left[f(-1),\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\right)$.

Όμως $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left[(x-1),\ln x-1\right]=+\infty$.

Άρα $f\left((0,1]\right)=[-1,+\infty)$ (1).

Επίσης επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$ είναι $f\left([1,+\infty)\right)=\left[f(1),\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)\right)$.

Όμως $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\left[(x-1)\ln x-1\right]=+\infty$.

Άρα $f\left([1,+\infty)\right)=[-1,+\infty)$ (2).

Από (1), (2) προκύπτει ότι το σύνολο τιμών της f είναι το $[-1, +\infty)$.

Γ2. Η εξίσωση $x^{x-1}=e^{2013}$ (επειδή η συνάρτηση $y=\ln x$ είναι γνησίως αύξουσα και άρα 1–1) γράφεται ισοδύναμα:

$\ln(x^{x-1})=\ln(e^{2013})\Leftrightarrow(x-1)\ln x=2013\Leftrightarrow(x-1)\ln x-1=2012\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x)-2012=0$.

Από το Γ_1 ερώτημα είναι:

α) $f\left((0,1]\right)=\left[-1,+\infty\right]$ άρα υπάρχει $x_1\in(0, 1]$ ώστε $f(x_1)=2012$ και επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα είναι και 1–1, άρα η τιμή x_1 είναι μοναδική στο διάστημα (0,1].

β) $f\left([1,+\infty]\right)=\left[-1,+\infty\right]$, άρα υπάρχει $x_2\in[1, +\infty)$ ώστε $f(x_2)=2012$ και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα είναι και 1–1, άρα η τιμή x_2 είναι μοναδική στο διάστημα $[1, +\infty)$.

Από α) και β) προκύπτει ότι η f έχει 2 ακριβώς θετικές ρίζες.

Γ3. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=e^x f(x)-2012\cdot e^x$ με $x\in(0,+\infty)$.

- Η h είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων.
- Η h είναι παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $h'(x)=\left(f'(x)+f(x)-2012\right)e^x$.
- $h(x_1)=e^{x_1}f(x_1)-2012\cdot e^{x_1}=2012\cdot e^{x_1}-2012\cdot e^{x_2}=0$

  $h(x_2)=e^{x_2}f(x_2)-2012\cdot e^{x_2}=2012\cdot e^{x_2}-2012\cdot e^{x_2}=0$

Άρα ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ. Rolle για την h στο $[x_1, x_2]$, οπότε υπάρχει $x_0 \in (x_1, x_2)$, ώστε $h'(x) = 0 \Leftrightarrow$

$$e^{x_0}\left(f'(x_0)+f(x_0)-2012\right)=0 \overset{e^{x_0}}{\Leftrightarrow} f'(x_0)+f(x_0)-2012=0 .$$

Γ4. Είναι: $g(x)=f(x)+1=(x-1)\ln x-1+1=(x-1)\ln x$.

Ακόμα: $g(x)>0,\ \forall\, x\in(1,e)$

Άρα: $\mathrm{E}(\Omega)=\int_1^e (x-1)\ln x dx=\int_1^e x\ln x dx-\int_1^e \ln x dx=\int_1^e (\frac{x^2}{2})'\ln x dx-\int_1^e (x)'\ln x dx=$

$$=\left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^e-\int_1^e \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}dx-\left[x\ln x\right]_1^e+\int_1^e dx=\frac{e^2}{2}-\frac{1}{2}\int_1^e x dx-e+\left[x\right]_1^e=$$

$$=\frac{e^2}{2}-\left[\frac{x^2}{4}\right]_1^e-e+e-1=\frac{e^2}{2}-\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}-1=\frac{e^2}{4}-\frac{3}{4}=\frac{e^2-3}{4}\ \text{τ.μ.}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Για κάθε $x \in (0,+\infty)$ ισχύει

$$\int_2^{x^2-x+1} -f(t)dx \geq \frac{x-x^2}{e} \Leftrightarrow e\cdot\int_1^{x^2-x+1} f(t)dt + x^2 - x \geq 0 \Leftrightarrow g(x) \geq 0$$

$\Leftrightarrow g(x) \geq g(1)$

όπου έχουμε θεωρήσει την συνάρτηση:

$$g(x) = e\cdot\int_1^{x^2-x+1} f(t)dt + x^2 - x\,, x \in (0,+\infty)$$

Ισχύουν:

- η g παρουσιάζει τοπικό μέγιστο για $x = 1$
- το 1 είναι εσωτερικό σημείο του $(0,+\infty)$
- η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ άρα και στο 1, με

$g'(x) = ef(x^2-x+1)\cdot(2x-1) + 2x - 1$ και $g'(1) = ef(1) + 1$.

Σύμφωνα με το Θ. Fermat θα ισχύει:

$$g'(1) = 0 \Leftrightarrow ef(1) + 1 = 0 \Leftrightarrow f(1) = -\frac{1}{e}$$

Η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (0,+\infty)$.
Αφού $f(1) = -\frac{1}{e} < 0$, θα είναι $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (0,+\infty)$.

Ισχύει: $\ln x - x = -\left(\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)}dt + e\right)\cdot\big(-f(x)\big)$

$$\Leftrightarrow lnx - x = f(x)\cdot\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)}dt + ef(x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{lnx - x}{f(x)} = \int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)} + e \qquad (1)$$

Επειδή:

$$\ln x - x = \left(\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)}dt + e\right)\cdot f(x) \Leftrightarrow f(x) = \frac{\ln x - x}{\left(\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)}dt + e\right)}$$

(Έχουμε: $\ln x - x < 0$ για κάθε $x > 0$ και $f(x) < 0$, για κάθε $x > 0$.
Συνεπώς πρέπει: $\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)}dt + e > 0$)

Η f είναι παραγωγίσιμη, αφού η $\frac{\ln t - t}{f(t)}$ είναι συνεχής (ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων) και συνεπώς η $\left(\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)}dt + e\right)$ είναι παραγωγίσιμη.

Θέτουμε: $h(x) = \int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)}\ dt$, $x \in (0, +\infty)$

και η (1) γράφεται :

$$h'(x) = h(x) + e \Leftrightarrow h'(x) - h(x) = e \Leftrightarrow e^{-x}\cdot h'(x) - e^{-x}\cdot h(x) = e^{1-x}$$

$$\Leftrightarrow [e^{-x}h(x)]' = (-e^{1-x})' \Leftrightarrow e^{-x}h(x) = -e^{1-x} + c$$

Για $x = 1$ είναι : $e^{-1}\cdot h(1) = -1 + c \Leftrightarrow 0 = -1 + c \Leftrightarrow c = 1$

και τελικά $e^{-x}h(x) = -e^{1-x} + 1 \Leftrightarrow h(x) = e^x - e \Leftrightarrow \int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)}\ dt = e^x - e$

Με παραγώγιση παίρνουμε $\frac{\ln x - x}{f(x)} = e^x \Leftrightarrow f(x) = e^{-x}(\ln x - x)$, $x \in (0, +\infty)$

Δ2. $\lim_{x\to 0^+}\left[(f(x))^2\, \eta\mu \frac{1}{f(x)} - f(x)\right] =$

$$= \lim_{u\to 0^-}\left[\frac{1}{u^2}\eta\mu u - \frac{1}{u}\right] \quad , \quad \text{θέτοντας } u = \frac{1}{f(x)} \text{ με } u \to 0^- \text{ καθώς } x \to 0^+$$

$$= \lim_{u\to 0^-}\left(\frac{\eta\mu^u}{u^2} - \frac{1}{u}\right)$$

$$= \lim_{u\to 0^-}\frac{\eta\mu u - u}{u^2} \underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim_{u\to 0^-}\frac{\sigma\upsilon\nu u - 1}{2u} = \frac{1}{2}\lim_{u\to 0^-}\frac{\sigma\upsilon\nu u - 1}{u} = \frac{1}{2}\cdot 0 = 0$$

Δ3. Η F είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με:

$$F'(x)=f(x) \text{ και } F''(x)=f'(x)=\left(\frac{\ln x-x}{e^x}\right)'=\frac{\left(\frac{1}{x}-1\right)e^x-(\ln x-x)\cdot e^x}{(e^x)^2}$$

$$=\frac{\frac{1}{x}-1-\ln x+x}{e^x}=\frac{\frac{1}{x}+(x-1-\ln x)}{e^x}>0$$

Άρα η F είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$.

- Η F είναι συνεχής στα $[x,2x]$ και $[2x,3x]$
- η F είναι συνεχής στα $(x,2x)$ και $(2x,3x)$

Με εφαρμογή του Θ.Μ.Τ. για την F στα διαστήματα $[x,2x]$ και $[2x,3x]$

(έχουν νόημα αφού $x>0$)

εξασφαλίζουμε $\xi_1\in(x,2x)$ και $\xi_2\in(2x,3x)$ ώστε να ισχύουν:

$$F'(\xi_1)=\frac{F(2x)-F(x)}{2x-x}=\frac{F(2x)-F(x)}{x} \text{ και } F'(\xi_2)=\frac{F(3x)-F(2x)}{3x-2x}=\frac{F(3x)-F(2x)}{x}$$

Όμως F' γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ και άρα :

$$\xi_1<\xi_2 \Leftrightarrow F'(\xi_1)<F'(\xi_2)\Leftrightarrow \frac{F(2x)-F(x)}{x}<\frac{F(3x)-F(2x)}{x}$$

$$\overset{x>0}{\Longleftrightarrow} F(2x)-F(x)<F(3x)-F(2x)\Leftrightarrow F(3x)+F(x)>2F(2x)$$

Δ4. Θεωρώ τη συνάρτηση: $\Phi(x)=2F(x)-F(\beta)-F(3\beta)$

- Φ συνεχής στο $[\beta,2\beta]$
- $\Phi(\beta)=F(\beta)-F(3\beta)>0$

  $\Phi(2\beta)=2F(2\beta)-F(\beta)-F(3\beta)<0$, από το Δ_3

Όμως είναι: $F'(x)=f(x)<0$ και άρα η F είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$ και αφού $\beta<3\beta\Leftrightarrow F(\beta)>F(3\beta)$

Σύμφωνα με το Θ. Bolzano υπάρχει $\xi\in(\beta,2\beta)$ ώστε να ισχύει:

$\Phi(\xi)=0\Leftrightarrow 2F(\xi)=F(\beta)+F(3\beta)$