Εξεταζόμενο Μάθημα: **Μαθηματικά & Στοιχεία Στατιστικής Γενικής Παιδείας**,

Ημ/νία: **20 Μαΐου 2015**

Απαντήσεις Θεμάτων

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία σχολικό βιβλίο σελ. 31

Α2. Θεωρία σχολικό βιβλίο σελ. 22

Α3. Θεωρία σχολικό βιβλίο σελ. 87

Α4. α) **Λάθος** β) **Σωστό** γ) **Λάθος** δ) **Λάθος** ε) **Σωστό**

ΘΕΜΑ Β

Β1. Λύνουμε την εξίσωση: $(3x-1)(8x^2-6x+1)=0 \Leftrightarrow$

$x_1 = {}^{1}\!/_{3}\,, x_2 = \frac{6+2}{16} = \frac{1}{2}$ και $x_3 = \frac{6-2}{16} = \frac{1}{4}$

Επειδή: $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$ ισχύει: $P(A \cap B) \leq P(A) \leq P(A \cup B)$

Επομένως είναι: $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$, $P(A) = \frac{1}{3}$ και $P(A \cup B) = \frac{1}{2}$.

Β2.

α΄ τρόπος

Έχουμε: $P(A' - B') = P(A' \cap B') = P(A - B) = P(B) - P(A \cap B)$

$$= P(A \cup B) - P(A) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

β΄ τρόπος

Είναι: $P(A' - B') = P(A') - P(A' \cap B') = 1 - P(A) - P((A \cup B)')$

$$= 1 - P(A) - 1 + P(A \cup B) = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

Παρατηρούμε ότι: $\varDelta = (A \cap B)'$ οπότε για την πιθανότητα του $\varDelta$ ισχύει:

$$P(\varDelta) = 1 - P(A \cap B) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Β3. Επειδή τα ενδεχόμενα $A - B$, $B - A$ ασυμβίβαστα έχουμε:

$P(E) = P[(A-B)\cup(B-A)] = P(A) + P(B) - 2P(A\cap B)$

$= P(A\cup B) - P(A\cap B) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{4}$

Β4. Λύνουμε την εξίσωση: $9x^2 - 3x - 2 = 0$ με $\Delta = 9 + 72 = 81$

Οπότε οι λύσεις είναι: $\begin{cases} x_1 = \frac{12}{18} = \frac{2}{3} \\ x_2 = -\frac{6}{18} = -\frac{1}{3} \end{cases}$

Η λύση x_2απορρίπτεται διότι: $0 \le P(\Gamma) \le 1$

Επίσης: $P(B) = P(A\cup B) - P(A) + P(A\cap B) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$

Έστω ότι τα ενδεχόμενα B, Γ είναι ασυμβίβαστα. Τότε: $P(B\cap\Gamma) = 0$

και $P(B\cup\Gamma) = P(B) + P(\Gamma) = \frac{5}{12} + \frac{2}{3} = \frac{13}{12} > 1$ άτοπο διότι: $0 \le P(B\cup\Gamma) \le 1$

Συνεπώς τα B, Γ δεν είναι ασυμβίβαστα.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

Ερμηνεύοντας τα δεδομένα παίρνουμε:
$f_1\% = 10, f_5\% = 30$. Επίσης: $\alpha_3 = 108^0 \Leftrightarrow f_3 = \frac{108}{360} \Leftrightarrow f_3 = 0{,}3$ ή $f_3\% = 30$.
Γνωρίζουμε ότι:

$$\sum_{i=1}^{5} f_i = 1 \Leftrightarrow f_2 = 0{,}3 - f_4 \quad (1)$$

Επίσης:

$$\bar{x} = 14 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{5} x_i \cdot f_i = 14 \Leftrightarrow 9\cdot 0{,}1 + 11\cdot(0{,}3 - f_4) + 13\cdot 0{,}3 + 15\cdot f_4 + 17\cdot 0{,}3 = 14$$

$\Leftrightarrow 4f_4 = 0{,}8 \Leftrightarrow f_4 = 0{,}2$ ή $f_4\% = 20$. Από τη σχέση (1): $f_2\% = 10$.

Γ2. Για τη διακύμανση είναι:

$$s^2 = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{5}(x_i - \bar{x})^2\cdot\nu_i = \sum_{i=1}^{5}(x_i - \bar{x})^2\cdot f_i$$
$$= (9-14)^2\cdot 0{,}1 + (11-14)^2\cdot 0{,}1 + (13-14)^2\cdot 0{,}3 + (15-14)^2\cdot 0{,}2 + (17-14)^2\cdot 0{,}3$$
$$= 6{,}6$$

Δηλαδή: $s^2 = 6{,}6 \Leftrightarrow s = \sqrt{6{,}6} \simeq 2{,}57$

Επομένως:
$$CV = \frac{s}{|\bar{x}|} \cdot 100\% = \frac{2{,}57}{14} \cdot 100\% = 18{,}357\% > 10\%$$

Άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

Γ3.

Από τον τύπο για τον υπολογισμό της μέσης τιμής έχουμε:

$$\bar{x} = 14 \Leftrightarrow \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{5} x_i \cdot \nu_i = 14 \Leftrightarrow \frac{1}{\nu}\left(\sum_{i=1}^{4} x_i \cdot \nu_i + x_5 \cdot \nu_5\right) = 14$$

$$\Leftrightarrow \frac{1780}{\nu} + 17 \cdot f_5 = 14 \Leftrightarrow \nu = 200$$

Γ4.

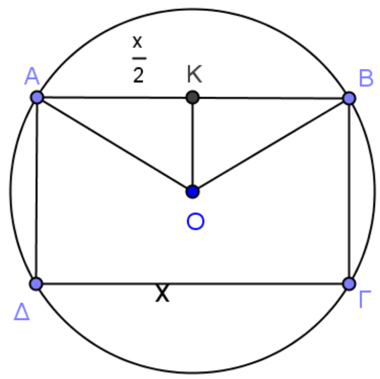
Για κάθε $i = 1, \dots 5$ είναι: $\beta_i = \frac{1}{s_a}\alpha_i - \frac{\bar{a}}{s_a}$

Από την εφαρμογή 3 στη σελίδα 99 του σχολικού βιβλίου γνωρίζουμε ότι:

$\bar{\beta} = \frac{1}{s_a}\bar{a} - \frac{\bar{a}}{s_a} = 0$ και $s_\beta = \left|\frac{1}{s_a}\right| s_a = 1$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Θεωρούμε την ακτίνα $OA = \rho = 5$ και το απόστημα $OK = \frac{A\Delta}{2}$.



Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΚΑ παίρνουμε:

$(OA)^2 = (AK)^2 + (OK)^2 \Leftrightarrow 25 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{A\Delta}{2}\right)^2 \Leftrightarrow$
$(A\Delta)^2 = 100 - x^2$ όπου $0 < x < 2\rho = 10$ εφόσον το ορθογώνιο είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο.

Επομένως: $(A\Delta) = \sqrt{100 - x^2}$ με $0 < x < 10$.

Για τη συνάρτηση $f(x)$ που δίνει το εμβαδό του ορθογωνίου ΑΒΓΔ έχουμε:

$$f(x) = (AB) \cdot (A\Delta) = x \cdot \sqrt{100 - x^2}$$

Δ2. Η συνάρτηση $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,10)$ με

$$f'(x) = \sqrt{100 - x^2} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{100 - x^2}} \cdot (100 - x^2)'$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = \sqrt{100 - x^2} - \frac{2x^2}{2\sqrt{100 - x^2}}$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = \frac{100 - x^2 - x^2}{\sqrt{100 - x^2}} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{(100 - 2x^2)}{\sqrt{100 - x^2}}$$

Λύνουμε την εξίσωση:

$$\begin{cases} f'(x) = 0 \\ x \in (0, 10) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 100 - 2x^2 = 0 \\ x \in (0, 10) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 50 \\ x \in (0, 10) \end{cases} \Leftrightarrow x = 5\sqrt{2}$$

Επίσης, $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 100 - 2x^2 > 0 \\ x \in (0, 10) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 < 50 \\ x \in (0, 10) \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < 5\sqrt{2}$

Στη συνέχεια κατασκευάζουμε πίνακα μονοτονίας ακροτάτων:

x	0		$5\sqrt{2}$		10
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$		$\searrow$	

Η συνάρτηση παρουσιάζει μέγιστο για $x = 5\sqrt{2}$, άρα το παραλληλόγραμμο έχει για $x = 5\sqrt{2}$ μέγιστο εμβαδό.

Για $x = (AB) = 5\sqrt{2}$ είναι $(AΔ) = \sqrt{100 - x^2} = \sqrt{100 - 50} = 5\sqrt{2} = x$. Συνεπώς, το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο.

Δ3. Για το όριο έχουμε:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(1+x) - \sqrt{99}}{98 \cdot x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{98} \frac{f(1+x) - f(1)}{x} = \frac{1}{98} \lim_{x \to 0} \frac{f(1+x) - f(1)}{x}$$

$$= \frac{1}{98} f'(1) = \frac{1}{98} \frac{98}{\sqrt{99}} = \frac{1}{\sqrt{99}} = \frac{\sqrt{99}}{99}$$

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της παραγώγου στο σημείο $x_0 = 1$:

$$f'(1) = \lim_{x \to 0} \frac{f(1+x) - f(1)}{x}$$

Δ4. Για ενδεχόμενα A, B γνωρίζουμε ότι $A - B \subseteq A$ οπότε:

$0 < P(A - B) \leq P(A) < 5\sqrt{2}$, εφόσον $A \cap B \neq \emptyset$.

Οπότε: $0 < P^2(A - B) \leq P^2(A) < 1$ και

$99 < 100 - P^2(A) \leq 100 - P^2(A - B) \Leftrightarrow 1 < \sqrt{100 - P^2(A)} \leq \sqrt{100 - P^2(A - B)} < \sqrt{99}$ (1)

Έχουμε: $0 < P(A - B) \leq P(A) < 5\sqrt{2}$

Στο διάστημα αυτό η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα, οπότε παίρνουμε:

$$f\big(P(A-B)\big) \leq f\big(P(A)\big) \Leftrightarrow P(A-B)\sqrt{100-(P(A-B))^2} \leq P(A)\sqrt{100-(P(A))^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{P(A-B)}{\sqrt{100-(P(A))^2}} \leq \frac{P(A)}{\sqrt{100-(P(A-B))^2}}$$

Επομένως, χρησιμοποιώντας και τη σχέση (1) παίρνουμε:

$$0 < \frac{P(A-B)}{\sqrt{100-(P(A))^2}} \leq \frac{P(A)}{\sqrt{100-(P(A-B))^2}} < \frac{P(A)}{\sqrt{99}} \leq \frac{1}{\sqrt{99}} < 5\sqrt{2}$$

Στο διάστημα $(0,\ 5\sqrt{2}\,]$ η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα, οπότε:

$$f\left(\frac{P(A-B)}{\sqrt{100-(P(A))^2}}\right) \leq f\left(\frac{P(A)}{\sqrt{100-(P(A-B))^2}}\right)$$