Θέμα Α

Α1. Απόδειξη θεωρήματος, ***σελ. 262*** (σχ. βιβλ.)

Α2. Ορισμός, ***σελ. 141*** (σχ. βιβλ.)

Α3. Διατύπωση θεωρήματος, ***σελ.246*** (σχ. βιβλ.) &
Γεωμετρική ερμηνεία, ***σελ.247*** (σχ. βιβλ.)

Α4.
α) **Λ**
β) **Σ**
γ) **Λ**
δ) **Σ**
ε) **Σ**

Θέμα Β

Β1. $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$

Η f είναι συνεχής στο $A=\mathbb{R}$ ως ρητή συνάρτηση, με παράγωγο:

$$f'(x)=\frac{2x\cdot\left(x^2+1\right)-2x\cdot x^2}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{2x^3+2x-2x^3}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2},\ x\in\mathbb{R}$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow 2x=0\Leftrightarrow x=0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$2x$	$-$	0	$+$
$\left(x^2+1\right)^2$	$+$		$+$
f'	$-$	0	$+$
f	$\searrow$		$\nearrow$

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

Η f παρουσιάζει στο $x_0=0$ ολικό ελάχιστο το $f(0)=0$.

Β2. $f'(x)=\dfrac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$

Επομένως:

$$f''(x)=\frac{2\cdot\left(x^2+1\right)^2-2\left(x^2+1\right)\cdot 2x\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^4}=\frac{2\left(x^2+1\right)\left(x^2+1-4x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^4}=\frac{2\left(1-3x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^3},\ x\in\mathbb{R}$$

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow 1-3x^2=0 \Leftrightarrow 3x^2=1 \Leftrightarrow x^2=\frac{1}{3} \Leftrightarrow x=-\frac{1}{\sqrt{3}} \;\text{ ή }\; x=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$+\infty$
$1-3x^2$	$-$	0	$+$	0	$-$
$(x^2+1)^3$	$+$		$+$		$+$
f''	$-$	0	$+$	0	$-$
f	∩		∪		∩

Η f είναι κοίλη στα διαστήματα $\left(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{3}}\right]$ και $\left[\frac{1}{\sqrt{3}},+\infty\right)$, ενώ κυρτή στο $\left[-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right]$.

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}+1}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{3}}=\frac{1}{4}$$

Η f έχει στα $x_1=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ και $x_2=\frac{1}{\sqrt{3}}$ σημεία καμπής τα $A\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{4}\right)$ και $B\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{4}\right)$.

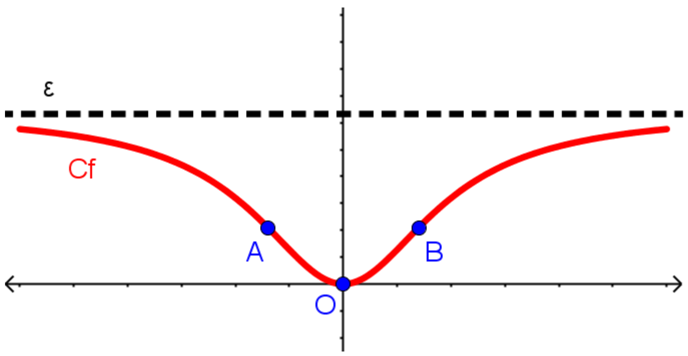
B3. Επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, η γραφική της παράσταση δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

Επίσης: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$

άρα η C_f έχει οριζόντια ασύμπτωτη και στο $+\infty$ και στο $-\infty$, την ευθεία $\varepsilon:\ y=1$.

B4. Πίνακας Μεταβολών

x	$-\infty$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$+\infty$
f''	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$
f'	$-$		$-$	0	$+$		$+$
f	↘ (κοίλη)		↘ (κυρτή)		↗ (κυρτή)		↗ (κοίλη)



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Θεωρούμε τη συνάρτηση: $g(x)=e^{x^2}-x^2-1,\ x\in\mathbb{R}$

Επομένως: $g'(x)=2xe^{x^2}-2x=2x\left(e^{x^2}-1\right),\ x\in\mathbb{R}$

$g'(x)=0\Leftrightarrow 2x\left(e^{x^2}-1\right)=0\Leftrightarrow\quad 2x=0 \quad$ ή $\quad e^{x^2}-1=0$

$x=0 \qquad e^{x^2}=1\Leftrightarrow x^2=0\Leftrightarrow x=0$ διπλή ρίζα

Επίσης, για κάθε $x\neq 0$ ισχύει:
$x^2>0\Leftrightarrow e^{x^2}>1\Leftrightarrow e^{x^2}-1>0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$2x$	$-$	0	$+$
$e^{x^2}-1$	$+$	0	$+$
g'	$-$	0	$+$
g	$\searrow$		$\nearrow$

Η g παρουσιάζει στο $x_0=0$ ολικό ελάχιστο το $g(0)=0$. Από ορισμό, έχουμε:
$g(x)\geq g(0)\Leftrightarrow g(x)\geq 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$
με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=0$.

Επομένως, η εξίσωση: $e^{x^2}-x^2-1=0$
έχει μοναδική λύση την $x=0$.

Γ2. $f^2(x)=\left(e^{x^2}-x^2-1\right)^2\Leftrightarrow\left|f(x)\right|=\left|e^{x^2}-x^2-1\right|$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Από το ερώτημα Γ1. αποδείξαμε ότι: $g(x)\geq 0\Leftrightarrow e^{x^2}-x^2-1\geq 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$
Άρα: $\left|f(x)\right|=e^{x^2}-x^2-1$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ (1)

για $x=0$: $\quad\left|f(0)\right|=0\Leftrightarrow f(0)=0$ (2)

για $x\neq 0$: $\quad e^{x^2}-x^2-1>0$, δηλαδή $\left|f(x)\right|\neq 0\Leftrightarrow f(x)\neq 0$ και επειδή η f είναι συνεχής σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$, η f διατηρεί σταθερό πρόσημο σε κάθε ένα από αυτά.

Επομένως διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις, με βάση τις σχέσεις (1) και (2):

- Αν $f(x)>0$, για κάθε $x<0$ και $x>0$, τότε: $\quad f(x)=e^{x^2}-x^2-1,\ x\in\mathbb{R}$
- Αν $f(x)<0$, για κάθε $x<0$ και $x>0$, τότε: $\quad f(x)=-e^{x^2}+x^2+1,\ x\in\mathbb{R}$
- Αν $f(x)>0,\ x<0$ και $f(x)<0,\ x>0$, τότε: $\quad f(x)=\begin{cases} e^{x^2}-x^2-1, & \text{αν } x\leq 0\\ -e^{x^2}+x^2+1, & \text{αν } x>0\end{cases}$
- Αν $f(x)<0,\ x<0$ και $f(x)>0,\ x>0$, τότε: $\quad f(x)=\begin{cases} -e^{x^2}+x^2+1, & \text{αν } x\leq 0\\ e^{x^2}-x^2-1, & \text{αν } x>0\end{cases}$

Γ3. $f(x)=e^{x^2}-x^2-1$, $x\in\mathbb{R}$ όπου $g(x)=e^{x^2}-x^2-1$, $x\in\mathbb{R}$ από το ερώτημα Γ1.

Επομένως: $f'(x)=g'(x)=2x\left(e^{x^2}-1\right)$, $x\in\mathbb{R}$ και

$$f''(x)=2\cdot\left(e^{x^2}-1\right)+2x\cdot 2xe^{x^2}=2\left(e^{x^2}-1\right)+4x^2e^{x^2}\ ,\ x\in\mathbb{R}$$

για $x=0$: $f''(0)=0$

για $x\neq 0$: $e^{x^2}-1>0$ και $4x^2e^{x^2}>0$, επομένως: $f''(x)>0$

Άρα η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

Γ4. Θεωρούμε τη συνάρτηση: $\kappa(x)=f(x+3)-f(x)$, $x\geq 0$

Τότε: $\kappa'(x)=f'(x+3)-f'(x)$, $x\geq 0$

Επειδή η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$, η f' είναι γνησίως αύξουσα. Επομένως:

$x+3>x\Leftrightarrow f'(x+3)>f'(x)\Leftrightarrow f'(x+3)-f'(x)>0\Leftrightarrow \kappa'(x)>0$, για κάθε $x\geq 0$

και έτσι η $\kappa(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$, άρα και «1-1».

Για $x\geq 0$, έχουμε:

$$f(|\eta\mu x|+3)-f(|\eta\mu x|)=f(x+3)-f(x)\Leftrightarrow \kappa(|\eta\mu x|)=\kappa(x)\Leftrightarrow |\eta\mu x|=|x|\Leftrightarrow x=0$$

Γνωρίζουμε ότι: $|\eta\mu x|\leq |x|$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=0$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Με βάση τη δοσμένη σχέση, έχουμε:

$$\int_0^{\pi}\left(f(x)+f''(x)\right)\eta\mu x\,dx=\pi\Leftrightarrow$$

$$\int_0^{\pi}f(x)\eta\mu x\,dx+\int_0^{\pi}f''(x)\eta\mu x\,dx=\pi\Leftrightarrow \int_0^{\pi}f(x)(-\sigma\upsilon\nu x)'\,dx+\int_0^{\pi}\left(f'(x)\right)'\eta\mu x\,dx=\pi\Leftrightarrow$$

$$\left[-f(x)\sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}f'(x)(-\sigma\upsilon\nu x)\,dx+\left[f'(x)\eta\mu x\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}f'(x)\sigma\upsilon\nu x\,dx=\pi\Leftrightarrow$$

$$f(\pi)+f(0)=\pi\quad (1)$$

Θέτουμε: $g(x)=\dfrac{f(x)}{\eta\mu x}\Leftrightarrow g(x)\eta\mu x=f(x)$ με $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=1$

Τότε: $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}g(x)\eta\mu x=1\cdot 0=0$ και επειδή η f είναι συνεχής και $f(0)=0$.

Άρα από την (1) προκύπτει ότι $f(\pi)=\pi$.

Επίσης: $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{g(x)\eta\mu x}{x}=\lim\limits_{x\to 0} g(x)\cdot\frac{\eta\mu x}{x}=1\cdot 1=1$

Δ2. α) Έστω ότι η f παρουσιάζει στο $x_0\in\mathbb{R}$ ακρότατο. Τότε, από το θεώρημα Fermat ισχύει: $f'(x_0)=0$.

Παραγωγίζοντας κατά μέλη τη δοσμένη σχέση, έχουμε:
$e^{f(x)}+x=f(f(x))+e^x\Rightarrow f'(x)e^{f(x)}+1=f'(f(x))f'(x)+e^x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$

για $x=x_0$: $f'(x_0)e^{f(x_0)}+1=f'(f(x_0))f'(x_0)+e^{x_0}\Leftrightarrow 1=e^{x_0}\Leftrightarrow x_0=0$

δηλαδή: $f'(0)=0$ άτοπο, διότι $f'(0)=1$ από το ερώτημα Δ1.

Επομένως η f δεν παρουσιάζει ακρότατα στο $\mathbb{R}$.

β) Από το προηγούμενο υποερώτημα, δείξαμε ότι $f'(x)\neq 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
Επίσης η f' είναι συνεχής, μιας και η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη, άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$ και επειδή $f'(0)=1>0$, έχουμε $f'(x)>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, δηλαδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Δ3. $\left|\frac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{f(x)}\right|=\frac{|\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x|}{|f(x)|}\leq\frac{|\eta\mu x|+|\sigma\upsilon\nu x|}{|f(x)|}\leq\frac{2}{|f(x)|}$ διότι: $|\eta\mu x|\leq 1$ και $|\sigma\upsilon\nu x|\leq 1$

Άρα: $-\frac{2}{|f(x)|}\leq\frac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{f(x)}\leq\frac{2}{|f(x)|}$

Επειδή $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$ και η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής, έχουμε: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

Επομένως: $\lim\limits_{x\to+\infty}-\frac{2}{|f(x)|}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{|f(x)|}=0$

Από Κριτήριο Παρεμβολής: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{f(x)}=0$

Δ4. $x\geq 1\Leftrightarrow \ln x\geq 0\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(\ln x)\geq f(0)\Leftrightarrow f(\ln x)\geq 0\overset{x>0}{\Leftrightarrow}\frac{f(\ln x)}{x}\geq 0$ και δεν μηδενίζει παντού στο διάστημα $\left[1,e^{\pi}\right]$.

Άρα: $\int_1^{e^{\pi}}\frac{f(\ln x)}{x}dx>0$

$x \le e^{\pi} \Leftrightarrow \ln x \le \ln e^{\pi} \Leftrightarrow \ln x \le \pi \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(\ln x) \le f(\pi) \Leftrightarrow f(\ln x) \le \pi \overset{x>0}{\Leftrightarrow} \frac{f(\ln x)}{x} \le \frac{\pi}{x} \Leftrightarrow$

$\frac{f(\ln x)}{x} - \frac{\pi}{x} \le 0$ και δεν μηδενίζει παντού στο διάστημα $\left[1, e^{\pi}\right]$.

Άρα: $\int_1^{e^{\pi}} \left(\frac{f(\ln x)}{x} - \frac{\pi}{x}\right) dx < 0 \Leftrightarrow \int_1^{e^{\pi}} \frac{f(\ln x)}{x} dx < \int_1^{e^{\pi}} \frac{\pi}{x} dx \Leftrightarrow \int_1^{e^{\pi}} \frac{f(\ln x)}{x} dx < \left[\pi \ln x\right]_1^{e^{\pi}} \Leftrightarrow$

$\int_1^{e^{\pi}} \frac{f(\ln x)}{x} dx < \pi \ln e^{\pi} \Leftrightarrow \int_1^{e^{\pi}} \frac{f(\ln x)}{x} dx < \pi^2$

Επομένως, δείξαμε ότι: $0 < \int_1^{e^{\pi}} \frac{f(\ln x)}{x} dx < \pi^2$