Πανελλήνιες Εξετάσεις Ημερήσιων Γενικών Λυκείων

Εξεταζόμενο Μάθημα: **Μαθηματικά Προσανατολισμού,**

Θετικών & Οικονομικών Σπουδών

Ημερομηνία: **9 Ιουνίου 2017**

Απαντήσεις Θεμάτων

Θέμα Α

Α1. Θεωρία, βλ. σχολικό βιβλίο το θεώρημα της σελ. 135 (παράγραφος 2.6)

Α2.

α) **Ψευδής**

β) Από τη θεωρία του σχολικού βιβλίου (παράγραφος 2.1) γνωρίζουμε πως αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε σημείο x_o του πεδίου ορισμού της τότε είναι και συνεχής στο x_o.

Αντιπαράδειγμα: $f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$

η οποία είναι συνεχής στο $x_o = 0$ αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_o = 0$.

Α3. Θεωρία, βλ. σχολικό βιβλίο ορισμός στη σελ. 73 (παράγραφος 1.8)

Α4. α) **Λάθος** **β)** **Σωστό** **γ)** **Λάθος** **δ)** **Σωστό** **ε)** **Σωστό**

Θέμα Β

Β1. Για να ορίζεται η συνάρτηση $(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$ πρέπει:

$$\begin{cases} x \in D_g \\ g(x) \in D_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ g(x) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ \dfrac{x}{1-x} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x(1-x) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < 1$$

Επομένως ορίζεται η $f \circ g$ και είναι:

$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right) \quad \text{για κάθε } x \in (0,1)$$

Β2. Η h είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0,1)$ ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων με :

$$h'(x) = \frac{1}{\frac{x}{1-x}} \cdot \left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{1-x}{x} \cdot \frac{1-x+x}{(1-x)^2}$$

$\Leftrightarrow h'(x) = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1-x} = \frac{1}{x(1-x)} > 0$, για κάθε $x \in (0,1)$.

Η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,1)$ επομένως έχει την ιδιότητα "$1-1$" άρα η h είναι αντιστρέψιμη.

Η h είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $A = (0,1)$. Επομένως το σύνολο τιμών της είναι:

$h(A) = \left(\lim_{x\to 0^+} h(x)\ , \lim_{x\to 1^-} h(x)\right) = (-\infty\,, +\infty)$ διότι:

$\lim_{x\to 0^+} h(x) = \lim_{x\to 0^+} \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$ $\quad \frac{x}{1-x} = u$, $\quad x \to 0^+ \quad u \to 0^+$

$= \lim_{u\to 0^+} \ln u = -\infty$

$\lim_{x\to 1^-} h(x) = \lim_{x\to 1^-} \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$ $\quad \frac{x}{1-x} = u$, $\quad x \to 1^- \quad u \to +\infty$

$\lim_{u\to +\infty} \ln u = +\infty$

Επομένως, η συνάρτηση h^{-1} έχει πεδίο ορισμού το $(-\infty\,, +\infty)$.

Για να βρούμε την αντίστροφη της h θέτουμε:

$y = h(x)$ και λύνουμε ως προς x

Έχουμε:

$y = h(x)$

$\Leftrightarrow y = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$

$\Leftrightarrow e^y = \frac{x}{1-x}$

$\Leftrightarrow e^y - e^y x = x$

$\Leftrightarrow e^y = e^y x + x$

$\Leftrightarrow e^y = (e^y + 1)x$ και $e^y + 1 > 0$, για κάθε $y \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow x = \frac{e^y}{e^y + 1}$

Άρα ο τύπος της αντίστροφης είναι: $h^{-1}(y) = \frac{e^y}{e^y+1}$, $y \in \mathbb{R}$.

Θέτω όπου y το x οπότε: $h^{-1}(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$, $x \in \mathbb{R}$

Β3. Η φ είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty\,,+\infty)$ ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$\varphi'(x)=\frac{e^x(e^x+1)-e^x\cdot e^x}{(e^x+1)^2}=\frac{e^x}{(e^x+1)^2}>0 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Επομένως η φ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και δεν παρουσιάζει ακρότατα στο $\mathbb{R}$.

Η συνάρτηση φ' είναι παραγωγίσιμη ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$ με

$$\varphi''(x)=\frac{e^x(e^x+1)^2-2(e^x+1)\,e^x\cdot e^x}{(e^x+1)^4}=$$

$$=\frac{e^x(e^x+1)\,-2e^{2x}}{(e^x+1)^3}$$

$$=\frac{e^x-e^{2x}}{(e^x+1)^3}\,,\quad x\in\mathbb{R}$$

Λύνουμε:

- $\varphi''(x)=0 \Leftrightarrow \frac{e^x(1-e^x)}{(e^x+1)^3}=0 \Leftrightarrow e^x(1-e^x)=0$

  $\xLeftrightarrow{e^x>0\ ,\ x\in\mathbb{R}}\ 1-e^x=0 \Leftrightarrow x=0$

- $\varphi''(x)>0 \Leftrightarrow \frac{e^x(1-e^x)}{(e^x+1)^3}>0$

$\Leftrightarrow 1-e^x>0,$ διότι $e^x>0$ και $(e^x+1)^3>0$

$\Leftrightarrow 1>e^x \overset{e^x\uparrow}{\Leftrightarrow} x<0$

- $\varphi''(x)<0 \Leftrightarrow \frac{e^x(1-e^x)}{(e^x+1)^3}<0 \Leftrightarrow 1-e^x<0$

$\Leftrightarrow 1<e^x \overset{e^x\uparrow}{\Leftrightarrow} x>0$

Επομένως προκύπτει ο παρακάτω πίνακας

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\varphi''(x)$	$+$	0	$-$
$\varphi(x)$			

Η φ'' μηδενίζεται στο σημείο $x = 0$ και εκατέρωθεν αλλάζει πρόσημο. Ακόμη ορίζεται η εφαπτομένη της C_φ στο σημείο $A\big(0, \varphi(0)\big)$. Οπότε το σημείο $A\left(0, \frac{1}{2}\right)$ είναι σημείο καμπής της C_φ.

Β4. Έχουμε:

$$\lim_{x\to-\infty} \varphi(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{e^x+1} = 0 \quad \text{αφού} \quad \lim_{x\to-\infty} e^x = 0$$

Άρα η ευθεία $y = 0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_φ στο $-\infty$.

Επίσης, έχουμε:

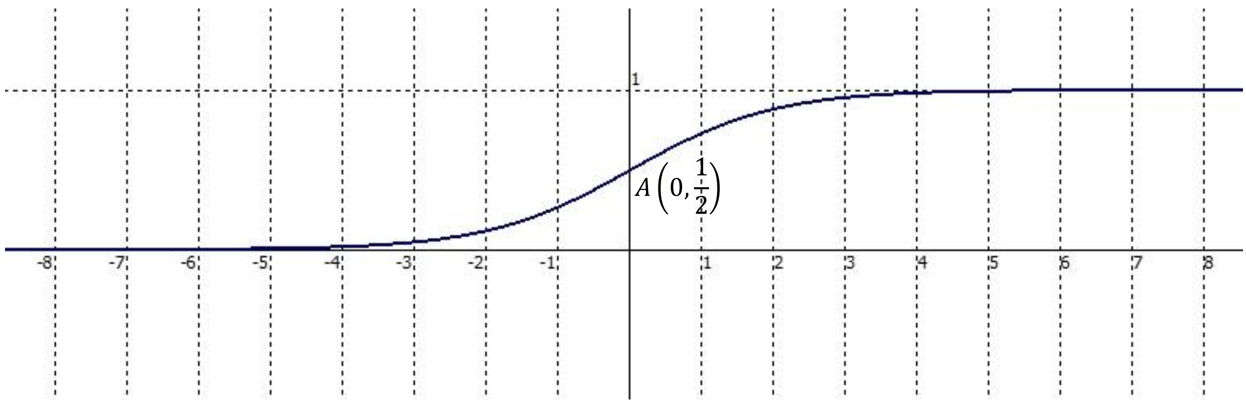
$$\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^x+1} \overset{\frac{+\infty}{-\infty}}{\underset{D.l.H.}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{(e^x)'}{(e^x+1)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^x} = 1$$

Άρα η ευθεία $y = 1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_φ.

Επιπλέον αφού ισχύει $\varphi = h^{-1}$, η φ έχει σύνολο τιμών το πεδίο ορισμού της h δηλαδή το διάστημα $(0,1)$. Σχηματίζουμε τον πίνακα μεταβολών της φ και χαράσουμε τη γραφική της παράσταση.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\varphi'(x)$	$+$		$+$
$\varphi''(x)$	$+$	0	$-$
$\varphi(x)$		ΣΚ	

Γραφική παράσταση:



Θέμα Γ

Γ1. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[0,\pi]$ με $f'(x) = -\sigma\upsilon\nu x$.

Έστω $M(x_0, f(x_0))$ το σημείο επαφής της εφαπτομένης (ε) της C_f που διέρχεται από το $A\left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$. Η εξίσωση εφαπτομένης στο σημείο M είναι:

$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y + \eta\mu x_0 = -\sigma\upsilon\nu x_0\,(x - x_0)$.

Όμως: $A \in (\varepsilon) \Leftrightarrow\ -\frac{\pi}{2} + \eta\mu x_0 = -\sigma\upsilon\nu x_0\,\left(\frac{\pi}{2} - x_0\right) \Leftrightarrow \eta\mu x_0 + \left(\frac{\pi}{2} - x_0\right)\sigma\upsilon\nu x_0\ -\frac{\pi}{2} = 0$

Θεωρούμε τη συνάρτηση: $g(x) = \eta\mu x + \left(\frac{\pi}{2} - x\right)\sigma\upsilon\nu x\ -\frac{\pi}{2},\ x \in [0,\pi]$.

Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $[0,\pi]$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$g'(x) = \left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)\eta\mu x$

α' τρόπος:

Παρατηρούμε ότι: $g(0) = g(\pi) = 0$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο $[0,\pi]$. Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη με: $g'(x) = \left(x - \frac{\pi}{2}\right)\eta\mu x,\ \ x \in [0,\pi]$

Ισχύει: $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{\pi}{2}\right)\eta\mu x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = \frac{\pi}{2}$ ή $x = \pi$.

Επίσης: $g'(x) > 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{\pi}{2}\right)\eta\mu x > 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} < x < \pi$

Σχηματίζουμε τον πίνακα μονοτονίας – ακροτάτων:

x	0		$\pi/2$		π
$g'(x)$	0	$-$	0	$+$	0
g		$\searrow$		$\nearrow$	

Η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\varDelta_1 = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ και $0 \in \varDelta_1$, οπότε η $g(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο $\varDelta_1$ την $x_1 = 0$.

Η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\varDelta_2 = \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ και $\pi \in \varDelta_2$, οπότε η $g(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο $\varDelta_2$ την $x_2 = \pi$.

Άρα η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει δύο ακριβώς ρίζες στο $[0,\pi]$ και συνεπώς προκύπτουν δύο ακριβώς σημεία επαφής M, δηλαδή δύο ακριβώς εφαπτομένες $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ της C_f που διέρχονται από το σημείο A.

β τρόπος:

Παρατηρούμε ότι: $g(0) = g(\pi) = 0$, άρα η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο $[0,\pi]$. Έστω ότι υπάρχει $x_0 \in (0,\pi)$ τρίτη ρίζα της εξίσωσης $g(x) = 0$.

Έχουμε ότι η συνάρτηση g είναι συνεχής στα διαστήματα $[0, x_0]$ και $[x_0, \pi]$ και παραγωγίσιμη στα διαστήματα $(0, x_0)$ και (x_0, π) αντίστοιχα με $g(0) = g(x_0)$

και $g(x_0) = g(\pi)$. Συνεπώς, με το θεώρημα Rolle υπάρχουν $\xi_1 \in (0, x_0)$, $\xi_2 \in (x_0, \pi)$ τέτοια ώστε $g'(\xi_1) = g'(\xi_2) = 0$.

Όμως $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \eta\mu x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = \frac{\pi}{2}$ ή $x = \pi$.

Αλλά: ξ_1, $\xi_2 \in (0, \pi)$ οπότε καταλήγουμε σε άτοπο, αφού η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα $(0, \pi)$ την $x = \frac{\pi}{2}$.

Άρα η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει δύο ακριβώς ρίζες στο $[0, \pi]$ και συνεπώς προκύπτουν δύο ακριβώς σημεία επαφής M, δηλαδή δύο ακριβώς εφαπτομένες $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ της C_f που διέρχονται από το σημείο A.

Γ2. Για να βρούμε τα σημεία τομής της C_f με τον $x'x$ λύνουμε στο $[0, \pi]$ την εξίσωση:

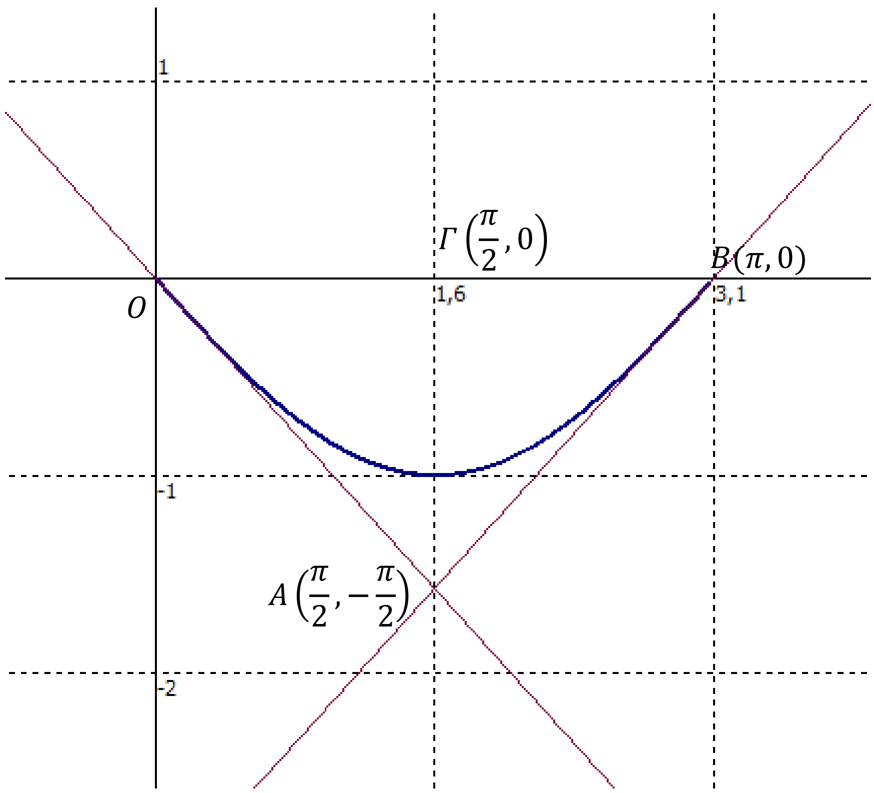
$f(x) = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = \pi$ γιατί $x \in [0, \pi]$.

Για κάθε $x \in [0, \pi]$ ισχύει $\eta\mu x \geq 0 \Leftrightarrow -\eta\mu x \leq 0 \Leftrightarrow f(x) \leq 0$

Επομένως, $E_2 = \int_0^x |f(x)| dx = -\int_0^x f(x)\, dx = \int_0^x \eta\mu x \; dx = [-\sigma\upsilon\nu x]_0^\pi$ =1+1=2 τ.μ.

Το εμβαδό του τριγώνου OAB είναι $E_{OAB} = \frac{(OB)(A\Gamma)}{2} = \frac{1}{2}|\pi|\left|-\frac{\pi}{2}\right| = \frac{\pi^2}{4}$

Συνεπώς $E_1 = E_{OAB} - E_2$ και τελικά $\frac{E_1}{E_2} = \frac{E_{OAB} - E_2}{E_2} = \frac{\frac{\pi^2}{4} - 2}{2} = \frac{\pi^2}{8} - 1$.



Γ3. Έχουμε:

$$\lim_{x\to\pi}\frac{f(x)+x}{f(x)-x+\pi} \overset{D_f=[0,\pi]}{=} \lim_{x\to\pi^-}\frac{-\eta\mu x+x}{-\eta\mu x-x+\pi} \quad (1)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=-\eta\mu x-x+\pi$, $x\in[0,\pi]$.
Η h είναι συνεχής στο $[0,\pi]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,\pi)$ ως πράξεις μεταξύ παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $h'(x)=-\sigma\upsilon\nu x-1<0$ για κάθε $x\in(0,\pi)$.
Επειδή η h είναι συνεχής στο $x=\pi$, η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,\pi]$.

Άρα για κάθε $0\le x<\pi \overset{h\downarrow}{\Leftrightarrow} \Leftrightarrow h(x)>h(\pi)\Leftrightarrow h(x)>0$.
Οπότε από τη σχέση (1) το όριο γίνεται:

$$\lim_{x\to\pi^-}\frac{-\eta\mu x+x}{-\eta\mu x-x+\pi}=\lim_{x\to\pi^-}\left[(-\eta\mu x+x)\cdot\frac{1}{-\eta\mu x-x+\pi}\right]=\pi\cdot(+\infty)=+\infty$$

αφού $\lim\limits_{x\to\pi^-}(-\eta\mu x-x+\pi)=0$ και $-\eta\mu x-x+\pi=h(x)>0$, για κάθε $x\in(0,\pi)$.

β' τρόπος:

Η f είναι συνεχής στο $[0,\pi]$ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,\pi)$ με $f''(x)=\eta\mu x>0$ για κάθε $x\in(0,\pi)$. Επομένως, η f είναι κυρτή στο $[0,\pi]$ και η εφαπτομένη (ε_2) της C_f βρίσκεται κάτω από την C_f με εξαίρεση το σημείο επαφής $B(\pi,0)$.
Δηλαδή $f(x)>x-\pi \Leftrightarrow -\eta\mu x-x+\pi>0$ για κάθε $x\in[0,\pi)$.

γ' τρόπος:

Θέτοντας στην (1) $u=\pi-x$ έχουμε ότι $u\to0^+$ καθώς $x\to\pi^-$ και το όριο γίνεται:

$$\lim_{u\to0^+}\left[(\pi-u-\eta\mu(\pi-u))\cdot\frac{1}{u-\eta\mu(\pi-u)}\right]=\lim_{u\to0^+}\left[(\pi-u-\eta\mu u)\cdot\frac{1}{u-\eta\mu u}\right]=\pi\cdot(+\infty)=+\infty,$$

αφού $\lim\limits_{u\to0^+}(u-\eta\mu u)=0$ και $u-\eta\mu u>0$, για κάθε $u\in(0,\pi)$.

Γ4. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0,\pi]$ με $f''(x)=\eta\mu x\ge0$ για κάθε $x\in[0,\pi]$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=0$ και $x=\pi$.

Επομένως, η f είναι κυρτή στο $[0,\pi]$ και η εφαπτομένη (ε_2) της C_f βρίσκεται κάτω από την C_f με εξαίρεση το σημείο επαφής $B(\pi,0)$.

Δηλαδή $f(x)>x-\pi \overset{x>0}{\Longleftrightarrow} \frac{f(x)}{x}>1-\frac{\pi}{x}$ για κάθε $x\in(1,e)$.

Άρα $\displaystyle\int_1^e\frac{f(x)}{x}\,dx>\int_1^e\left(1-\frac{\pi}{x}\right)dx=[x-\pi\ln|x|]_1^e=e-\pi-1+0=e-1-\pi$

Θέμα Δ

Δ.1.

- Για την συνέχεια της f έχουμε:

Η f είναι συνεχής στο $[-1,0)$ ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων

Η f είναι συνεχής στο $(0,\pi]$ ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \sqrt[3]{x^4} = 0$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (e^x \eta\mu x) = 0$, άρα $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$ και η f συνεχής στο 0.

Τελικά η f είναι συνεχής στο $[-1,\pi]$.

- Τα κρίσιμα σημεία της f είναι τα εσωτερικά σημεία του διαστήματος όπου η f δεν είναι παραγωγίσιμη ή ισχύει $f'(x) = 0$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,0)$ με $f'(x) = (\sqrt[3]{x^4})' = \left(|x|^{\frac{4}{3}}\right)' = \left((-x)^{\frac{4}{3}}\right)'$
$= \frac{4}{3}(-x)^{\frac{1}{3}}(-x)' = -\frac{4}{3}\sqrt[3]{-x} < 0$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,\pi)$ με

$f'(x) = (e^x \eta\mu x)' = e^x \eta\mu x + e^x \sigma\upsilon\nu x = e^x(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)$

και $f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x) = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x = -\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow$

$\varepsilon\varphi x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4}$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt[3]{x^4}}{x} = \lim_{x\to 0^-} \left(-\frac{(-x)^{\frac{4}{3}}}{(-x)}\right) = \lim_{x\to 0^-} \left(-(-x)^{\frac{1}{3}}\right) = \lim_{x\to 0^-} \left(-\sqrt[3]{-x}\right) = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x \eta\mu x}{x} = \lim_{x\to 0^+} e^x \lim_{x\to 0^+} \frac{\eta\mu x}{x} = 1 \cdot 1 = 1$$

Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο *0.*

Τελικά τα κρίσιμα της f στο $[-1,\pi]$ είναι τα $x_1 = 0$ και $x_2 = \frac{3\pi}{4}$.

Δ2. Οι ρίζες και το πρόσημο της παραγώγου φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	-1		0		$\frac{3\pi}{4}$		π	$+\infty$
$f'(x)$			$-$		$+$		$-$		
$f(x)$		Τοπικό Μέγιστο	↘	Ελάχιστο	↗	Μέγιστο	↘	Ελάχιστο	
		$\boxed{1}$		$\boxed{0}$		$\boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}}}$		$\boxed{0}$	

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $[-1,0]$, $\left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$ και γνησίως αύξουσα στο $\left[0, \frac{3\pi}{4}\right]$. Έχει τοπικό μέγιστο για $x = -1$, το $f(-1) = 1$ και για $x = \frac{3\pi}{4}$ έχει ολικό μέγιστο το $f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}} = M$ και ολικό ελάχιστο για $x = 0$, το $f(0) = 0 = m$ και για $x = \pi$, το $f(\pi) = 0 = m$.

Σύμφωνα με το Θεώρημα Μέγιστης και Ελάχιστης Τιμής (ΘΜΕΤ), η f έχει σύνολο τιμών το $[m, M] = \left[0, \ \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot e^{\frac{3\pi}{4}}\right]$, όπου m το ελάχιστο και M το μέγιστο της f.

Δ3.

$$E = \int_0^{\pi} |f(x) - e^{5x}| \ dx = \int_0^{\pi} |e^x \cdot \eta\mu x - e^{5x}| \ dx \ \ (1)$$

Ισχύει: $e^x \cdot \eta\mu x - e^{5x} = e^x \cdot (\eta\mu x - e^{4x})$

Για κάθε $x \in [0, \pi]$ είναι:

$x \geq 0 \Leftrightarrow 4x \geq 0 \Leftrightarrow e^{4x} \geq 1 \geq \eta\mu x$ και άρα $\eta\mu x - e^{4x} \leq 0$.

Η (1) γίνεται:

$$E = \int_0^{\pi} (e^{5x} - e^x \cdot \eta\mu x) \, dx =$$

$$\int_0^{\pi} e^{5x} \, dx - \int_0^{\pi} e^x \cdot \eta\mu x \ dx = I_1 - I_2$$

Για το ολοκλήρωμα I_1 έχουμε

$$I_1 = \int_0^{\pi} e^{5x} \, dx = \left[\frac{1}{5} \cdot e^{5x}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{5} e^{5\pi} - \frac{1}{5}$$

Για το ολοκλήρωμα I_2 έχουμε

$$I_2 = \int_0^{\pi} e^x \cdot \eta\mu x \ dx = \int_0^{\pi} (e^x)' \cdot \eta\mu x \ dx = [e^x \eta\mu x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^x \cdot \sigma\upsilon\nu x \ dx$$

$$= -\int_0^{\pi} e^x \cdot \sigma\upsilon\nu x \ dx = -\int_0^{\pi} (e^x)' \cdot \sigma\upsilon\nu x \ dx = -[e^x \sigma\upsilon\nu x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^x \cdot \eta\mu x \ dx$$

$$= -(-e^{\pi} - 1) - I_2 \Leftrightarrow$$

$$2 \cdot I_2 = e^{\pi} + 1 \Leftrightarrow I_2 = \frac{e^{\pi} + 1}{2}$$

Άρα $E = I_1 - I_2 = \frac{1}{5} e^{5\pi} - \frac{1}{5} - \frac{e^{\pi} + 1}{2}$

Δ4. Είναι:

$$16 \cdot e^{-\frac{3\pi}{4}} \cdot f(x) - e^{-\frac{3\pi}{4}} \cdot (4x - 3\pi)^2 = 8\sqrt{2}, \qquad x \in [-1, \pi]$$

$$\Leftrightarrow 16 \cdot f(x) - (4x - 3\pi)^2 = 8\sqrt{2} \cdot e^{\frac{3\pi}{4}}$$

$$\Leftrightarrow f(x) - \frac{(4x - 3\pi)^2}{16} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot e^{\frac{3\pi}{4}}$$

$$\Leftrightarrow f(x) - \left(x - \frac{3\pi}{4}\right)^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot e^{\frac{3\pi}{4}}$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{3\pi}{4}\right)^2 = f(x) - M \leq 0$$

Άρα $\left(x - \frac{3\pi}{4}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x - \frac{3\pi}{4} = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x = \frac{3\pi}{4}}$