Πανελλήνιες Εξετάσεις Ημερήσιων Γενικών Λυκείων

Εξεταζόμενο Μάθημα: **Μαθηματικά Προσανατολισμού**,

Θετικών & Οικονομικών Σπουδών

Ημερομηνία: **11 Ιουνίου 2018**

Απαντήσεις Θεμάτων

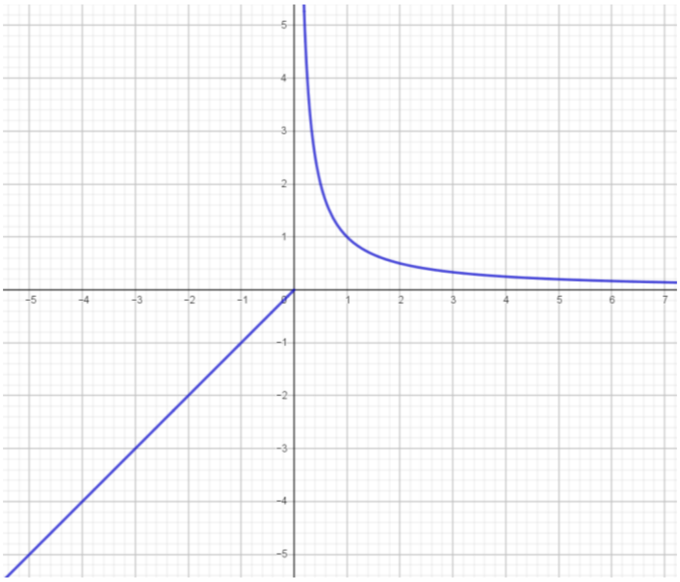
Θέμα Α

Α.1. Θεωρία σχολικού βιβλίου, απόδειξη σελίδα **99.**

Α.2.

α) Ψευδής.

β) Σχολικό βιβλίο σελίδα 35: Υπάρχουν συναρτήσεις που είναι 1-1 αλλά δεν είναι γνησίως μονότονες, όπως η συνάρτηση: $g(x) = \begin{cases} x\,, & x \leq 0 \\ \frac{1}{x}\,, & x > 0 \end{cases}$



Α.3. Θεωρία σχολικού βιβλίου,
Θεώρημα σελίδα **216**.

Α.4.

α) Λάθος

β) Λάθος

γ) Σωστό

δ) Σωστό

ε) Σωστό

Θέμα Β

Β1. Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}-\{0\}$ ως πράξεις μεταξύ συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x) = \left(x - \frac{4}{x^2}\right) = (x)' - \left(\frac{4}{x^2}\right)' = 1 - 4\left(\frac{1}{x^2}\right)' = 1 + \frac{8}{x^3}\,,\quad x \neq 0$$

Έχουμε:

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{8}{x^3}=-1 \Leftrightarrow x^3=-8 \Leftrightarrow x=-2$$

$$f'(x)>0 \Leftrightarrow \frac{8}{x^3}>-1$$

$$\frac{8}{x^3}+1>0 \Leftrightarrow \frac{8+x^3}{x^3}>0 \Leftrightarrow x^3(x^3+8)>0$$

$x^3(x+2)(x^2-2x+4)>0$ και το x^2-2x+4 έχει $\Delta<0$ συνεπώς $x^2-2x+4>$ —
0 , για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Επομένως, προκύπτει ο παρακάτω πίνακας προσήμων:

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
x^3		$-$		$-$		$+$	
$x+2$		$-$		$+$		$+$	
x^2-2x+4		$+$		$+$		$+$	
ΓΙΝ		$+$		$-$		$+$	

Τελικά $f'(x)>0$ για $x\in(-\infty,-2)\cup(0,+\infty)$

$f'(x)<0$ για $x\in(-2,0)$ και προκύπτει ο παρακάτω πίνακας μονοτονίας – ακροτάτων:

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$-$		$+$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Άρα, η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα: $(-\infty,-2]$, $(0,+\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-2,0)$. Επίσης, παρουσιάζει στη θέση $x=-2$, τοπικό μέγιστο το $f(-2)=-3$.

Β2. Η f' είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}-\{0\}$ ως πράξεις συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων

$$f''(x)=\left(1+\frac{8}{x^3}\right)'=-\frac{24}{x^4}<0 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}-\{0\}$$

Άρα η f είναι κοίλη στα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$ και δεν παρουσιάζει σημείο καμπής στο $\mathbb{R}\ -\{0\}$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f''	$-$	$\vert\vert$	$-$
f	$\frown$	$\vert\vert$	$\frown$

Β3. Ελέγχουμε την f για κατακόρυφη ασύμπτωτη στο $x = 0$.

- $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \left(x - \frac{4}{x^2}\right) = \lim\limits_{x\to 0^-} \left(x - 4\frac{1}{x^2}\right) = 0 - 4 \cdot (+\infty) = -\infty$

αφού $\lim\limits_{x\to 0^-} x^2 = 0$ και $x^2 > 0$ για κάθε $x \neq 0$ κοντά στο 0 , οπότε $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x^2} = -\infty$

- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (x - \frac{4}{x^2}) = \lim\limits_{x\to 0^+} \left(x - 4 \cdot \frac{1}{x^2}\right) = 0 - 4 \cdot (+\infty) = -\infty$

Αφού $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2 = 0$ *και* $x^2 > 0$ για κάθε $x \neq 0$ κοντά στο 0, οπότε $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$

Οπότε η $x = 0$ είναι η κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

Ελέγχουμε την f για ασύμπτωτες στα $-\infty$ και $+\infty$.

- $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x - \frac{4}{x^2}}{x} = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{\frac{x^3-4}{x^2}}{x} = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x^3-4}{x^3} = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x^3}{x^3} = 1 = \lambda$

$$\lim_{x\to -\infty} [f(x) - \lambda x] = \lim_{x\to -\infty} [f(x) - x] = \lim_{x\to -\infty} \left[x - \frac{4}{x^2} - x\right] = \lim_{x\to -\infty} \left(-\frac{4}{x^2}\right)$$
$$= -4 \lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x^2} = 0 = \beta$$

Άρα η $y = \lambda x + \beta \Leftrightarrow y = x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

- $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x - \frac{4}{x^2}}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\frac{x^3-4}{x^2}}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^3-4}{x^3} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^3}{x^3} = 1 = \lambda$

$$\lim_{x\to +\infty} [f(x) - \lambda x] = \lim_{x\to +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x\to +\infty} \left[x - \frac{4}{x^2} - x\right] = \lim_{x\to +\infty} -\frac{4}{x^2} = -4 \lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x^2} = 0 = \beta$$

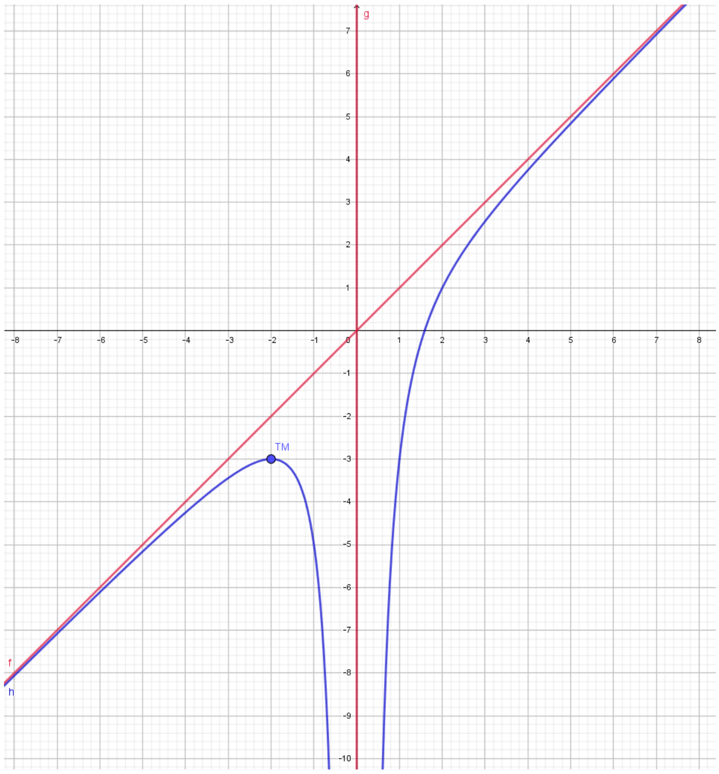
Άρα η $y = \lambda x + \beta \Leftrightarrow y = x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

Οπότε η C_f δεν παρουσιάζει οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$ ή στο $+\infty$ εφόσον παρουσιάζει πλάγια.

β τρόπος για τις πλάγιες ασύμπτωτες:

Είναι: $f(x) - x = -\frac{4}{x^2}$. Επειδή: $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \left(-\frac{4}{x^2}\right) = 0$ θα είναι και $\lim\limits_{x\to \pm\infty} (f(x) - x) = 0$, οπότε η $y = x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ και στο $-\infty$.

Β4. Από την παραπάνω ανάλυση προκύπτει η γραφική παράσταση:



Θέμα Γ

Γ1. Η πλευρά του τετραγώνου είναι $\alpha = \frac{x}{4} m$ και το εμβαδόν του $E_1(x) = \frac{x^2}{16}$, $x \in (0,8)$.

Το μήκος του κύκλου είναι $8 - x\ m$, άρα για την ακτίνα του ισχύει $2\pi\rho = 8 - x \Leftrightarrow \rho = \frac{8-x}{2\pi}\ m$ και το εμβαδόν του

$$E_2(x) = \pi\left(\frac{8-x}{2\pi}\right)^2 = \pi\frac{64 - 16x + x^2}{4\pi^2} = \frac{x^2 - 16x + 64}{4\pi}\ ,\quad x \in (0,8)$$

Επομένως, $E(x) = \dfrac{\pi x^2 + 4x^2 - 64x + 256}{16\pi} = \dfrac{(\pi + 4)x^2 - 64x + 256}{16\pi},\quad x \in (0,8)$

Γ2. Η Ε είναι παραγωγίσιμη στο (0,8) με

$$E'(x) = \frac{2(\pi + 4)x - 64}{16\pi}\ ,\quad x \in (0,8)$$

Θέτουμε:

$$E'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{32}{\pi + 4}$$

και προκύπτει ο ακόλουθος πίνακας μονοτονίας – ακροτάτων:

x	0	$\frac{32}{\pi+4}$	8
$E'(x)$	$-$	0	$+$
$E(x)$	$\searrow$	ολ. ελαχ.	$\nearrow$

Συνεπώς η E παρουσιάζει ελάχιστο στο $x = \frac{32}{\pi+4}\ m$. Για την τιμή αυτή ισχύει $\alpha = \frac{8}{\pi+4} m$ και

$$\delta = 2\rho = \frac{8 - \frac{32}{\pi+4}}{\pi} = \frac{8(\pi+4) - 32}{\pi(\pi+4)} = \frac{8\pi}{\pi(\pi+4)} = \frac{8}{\pi+4}\ m$$

Τελικά, για $x = \frac{32}{\pi+4} m$ η πλευρά του τετραγώνου ισούται με τη διάμετρο του κύκλου.

Γ3. Έχουμε ότι :

- $$\lim_{x\to 0^+} E(x) = \frac{16}{\pi}$$
- $$\lim_{x\to 8^-} E(x) = 4$$
- $$E\left(\frac{32}{\pi+4}\right) = \frac{(\pi+4)\cdot\frac{32^2}{(\pi+4)^2} - 64\cdot\frac{32}{\pi+4} + 256}{16\pi} =$$

$$= \frac{32^2 - 64\cdot 32 + 256(\pi+4)}{16\pi(\pi+4)} = \frac{16[64 - 128 + 16(\pi+4)]}{16\pi(\pi+4)} =$$

$$= \frac{-64 + 16\pi + 64}{\pi(\pi+4)} = \frac{16\pi}{\pi(\pi+4)} = \frac{16}{\pi+4}$$

Επειδή η E είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_1 = \left(0, \frac{32}{\pi+4}\right]$,

ισχύει $E(\Delta_1) = \left[E\left(\frac{32}{\pi+4}\right), \lim_{x\to 0^+} E(x)\right) = \left[\frac{16}{\pi+4}, \frac{16}{\pi}\right)$.

Επειδή η E είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta_2 = \left[\frac{32}{\pi+4}, 8\right)$,

ισχύει $E(\Delta_2) = \left[E\left(\frac{32}{\pi+4}\right), \lim_{x\to 8^-} E(x)\right) = \left[\frac{16}{\pi+4}, 4\right)$.

Αφού $\frac{16}{\pi} > 5$, ισχύει $5 \in E(\Delta_1)$ και η εξίσωση $E(x) = 5$ έχει μοναδική ρίζα στο Δ_1 επειδή η E είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ_1.

Αφού $5 \notin E(\Delta_2)$, η εξίσωση $E(x) = 5$ δεν έχει ρίζα στο Δ_2.

Άρα, υπάρχει ένας μόνο τρόπος ώστε το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων να ισούται με $5m^2$.

Θέμα Δ

Δ1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = 2e^{x-a} - 2x = 2(e^{x-a} - x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f''(x) = 2(e^{x-a} - 1)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow e^{x-a} - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{x-a} = e^0 \Leftrightarrow x - a = 0 \Leftrightarrow x = a$

$f''(x) < 0 \Leftrightarrow e^{x-a} - 1 < 0 \Leftrightarrow e^{x-a} < e^0 \Leftrightarrow x - a < 0 \Leftrightarrow x < a$

$f''(x) > 0 \Leftrightarrow e^{x-a} - 1 > 0 \Leftrightarrow e^{x-a} > e^0 \Leftrightarrow x - a > 0 \Leftrightarrow x > a$

Επειδή η f'' αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν της θέσης $x = a$ και ορίζεται εφαπτομένη της C_f στη θέση αυτή το $K\big(a, f(a)\big)$ δηλαδή το $K(a\,, 2 - a^2)$ είναι σημείο καμπής της C_f

x	$-\infty$	a	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$			

Δ2. Από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\varDelta_1 = (-\infty,\ a]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\varDelta_2 = [\alpha, +\infty)$.

Επειδή η f' είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ισχύουν: $f'(\varDelta_1) = \Big[f'(a), \lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)\Big) = [2 - 2a, +\infty)$

και $f'(\varDelta_2) = \Big[f'(a), \lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)\Big) = [2 - 2a, +\infty)$,

αφού: $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (2\,e^{x-a} - 2x) = 2 \lim\limits_{x\to+\infty} \left(e^{x-a}\left(1 - \frac{x}{e^{x-a}}\right)\right) = +\infty$, εφόσον:

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^{x-a}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{e^{x-a}} = 0$, με χρήση του κανόνα $D.L.H.$ για απροσδιόριστη μορφή «$\frac{+\infty}{+\infty}$».

Επειδή $0 \in f'(\varDelta_1)$ και $0 \in f'(\varDelta_2)$ υπάρχουν μοναδικοί $x_1 \in (-\infty, a)$ και $x_2 \in (\alpha, +\infty)$ τέτοιοι ώστε να ισχύει $f'(x_1) = 0$ και $f'(x_2) = 0$ αφού η f' είναι γνησίως μονότονη στα διαστήματα $\varDelta_1$ και $\varDelta_2$.

Για κάθε $x < x_1$ ισχύει $f'(x) > f'(x_1)$ και $f'(x) > 0$

Για κάθε $x_1 < x < a$ ισχύει $f'(x_1) > f'(x)$ και $f'(x) < 0$

Οπότε η f παρουσιάζει στη θέση x_1 τοπικό μέγιστο το $f(x_1)$ όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

Για κάθε $a < x < x_2$ ισχύει $f'(x) < f'(x_2)$ και $f'(x) < 0$

Για κάθε $x > x_2$ ισχύει $f'(x) > f'(x_2)$ και $f'(x) > 0$

Οπότε η $f(x_2)$ όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		x_1		1	a	x_2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0		$-$		0	$+$	
$f(x)$		↗			↘			↗	

Τοπικό Μέγιστο

Τοπικό Ελάχιστο

Δ3. Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta = [a, x_2]$, οπότε:

$f(\Delta) = [f(x_2), f(a)] = [f(x_2), 2 - a^2]$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι $f(1) \notin f(\Delta)$, δηλαδή: $f(1) > 2 - a^2 \Leftrightarrow 2\, e^{1-a} - 1 > 2 - a^2 \Leftrightarrow$

$2\, e^{1-a} + a^2 - 3 > 0.$

Θεωρούμε τη συνάρτηση: $h(x) = 2\, e^{1-x} + x^2 - 3$, με $x \geq 1$ και $h(1) = 0$.

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $[1, +\infty)$ με $h'(x) = -2e^{1-x} + 2x$.

Για κάθε $x > 1$ ισχύει: $-x < -1 \Leftrightarrow 1 - x < 0 \Leftrightarrow e^{1-x} < 1$, εφόσον η e^x είναι γνησίως αύξουσα, οπότε έχουμε: $-2\, e^{1-x} > -2 \Leftrightarrow\ -2\, e^{1-x} + 2x > 2x - 2$

Οπότε: $h'(x) > 2(x - 1) > 0$, για κάθε $x > 1$.

Άρα, η h είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1, +\infty)$ και η $x = 1$ είναι μοναδική ρίζα της εξίσωσης $h(x) = 0$. Για κάθε $x > 1 \Leftrightarrow h(x) > h(1) \Leftrightarrow h(x) > 0$.

Άρα $h(a) > 0 \Leftrightarrow 2\, e^{1-a} + a^2 - 3 > 0$, για κάθε $a > 1$.

β' τρόπος:

Αν υποθέσουμε ότι υπάρχει $x_0 \in (a, x_2)$ τέτοιο ώστε να ισχύει: $f(x_0) = f(1)$ τότε από εφαρμογή του Θ. Rolle για τη συνάρτηση f στο διάστημα $(1, x_0)$ εξασφαλίζουμε ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, x_0)$ ώστε να ισχύει: $f'(\xi) = 0$, το οποίο είναι άτοπο γιατί ισχύει η παρακάτω διάταξη: $x_1 < 1 < a < \xi < x_0 < x_2$.

Απόδειξη του ισχυρισμού $x_1 < 1$, αφού η ανίσωση: $\xi < x_0 < x_2$ είναι προφανής.

Ισχύουν: $f'(x_1) = 0$ και $f'(1) = 2\,(e^{1-a} - 1) < 0$, αφού $a > 1$.

Άρα, έχουμε: $f'(x_1) > f'(1)$ και εφόσον f' γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, a)$ ισχύει: $x_1 < 1$.

Δ4. Για $a = 2$ ισχύει $f(x) = 2e^{x-2} - x^2$, $x \in \mathbb{R}$ με $f'(x) = 2e^{x-2} - 2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Η εφαπτομένη (ε) της C_f στο σημείο $K(2, -2)$ έχει εξίσωση

$(\varepsilon): y - f(2) = f'(2) \cdot (x - 2)$, όπου $f(2) = -2$ και $f'(2) = -2$

$(\varepsilon): y + 2 = -2(x - 2)$

$(\varepsilon): y = -2x + 2$

Επειδή η f είναι κυρτή στο $[2, +\infty)$ η εφαπτομένη (ε) της C_f στο σημείο K βρίσκεται κάτω από αυτήν με εξαίρεση το σημείο επαφής τους K.

Επομένως ισχύει $f(x) \geq -2x + 2$ για κάθε $x \geq 2$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 2$.

Άρα ισχύει $f(x) \cdot \sqrt{x-2} \geq (-2x+2) \cdot \sqrt{x-2}$ αφού $x \geq 2$,
με το «=» να ισχύει μόνο για $x = 2$.

οπότε $\int_2^3 f(x) \cdot \sqrt{x-2}\ dx > \int_2^3 (-2x+2) \cdot \sqrt{x-2}\ dx$

Έστω $I = \int_2^3 (-2x+2) \cdot \sqrt{x-2}\ dx$

Θέτουμε $u = \sqrt{x-2}$, είναι: $du = \frac{1}{2\sqrt{x-2}}\ dx \Leftrightarrow du = \frac{1}{2u}\ dx \Leftrightarrow dx = 2u\, du$

Επίσης: $x - 2 = u^2 \Leftrightarrow x = u + 2$ και όταν $x = 2$ τότε $u = 0$ και όταν $x = 3$ τότε $u = 1$.
Άρα:

$$I = \int_0^1 [-2(u^2+2)+2] \cdot u \cdot 2u\, du$$

$$I = -4\int_0^1 (u^4 + u^2)\ du$$

$$I = -4\left[\frac{u^5}{5} + \frac{u^3}{3}\right]_0^1$$

$$I = -4\ \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3}\right) = \frac{-32}{15}$$

οπότε ισχύει:

$$\int_2^3 f(x) \cdot \sqrt{x-2}\ dx > \frac{-32}{15}$$