Πανελλήνιες Εξετάσεις Ημερήσιων Γενικών Λυκείων

Εξεταζόμενο Μάθημα: **Μαθηματικά Προσανατολισμού, Θετικών & Οικονομικών Σπουδών**
Ημερομηνία: 10 Ιουνίου 2019

Ενδεικτικές Απαντήσεις Θεμάτων

Θέμα Α

Α1.

α) Σχολικό βιβλίο, σελίδα **15**

β)

i) Σχολικό βιβλίο, σελίδα **35**

ii) Σχολικό βιβλίο, σελίδα **35-36**

Α2. Σχολικό βιβλίο, σελίδα 1**42**

Α3. Σχολικό βιβλίο, σελίδα **135**

Α4.

α) Λάθος.

Σχολικό βιβλίο, σελίδα **134**

β) Λάθος.

Σχολικό βιβλίο, σελίδα **71**

Α5. Σχολικό βιβλίο, σελίδα **239.**

Η σωστή απάντηση είναι η **γ.**

Θέμα Β

Β1. Αφού η ευθεία $y = 2$ είναι η οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ τότε ισχύει:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2 \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}[e^{-x}+\lambda] = 2 \Leftrightarrow \lambda = 2 \text{ αφού } \lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$$

Β2. Έστω η συνάρτηση: $h(x) = f(x) - x, x \in [2,3]$.

Η h είναι συνεχής στο $[2,3]$ και παραγωγίσιμη στο $(2,3)$, με $h'(x) = (e^{-x} + 2 - x)'$ $\Leftrightarrow h'(x) = -e^{-x} - 1 < 0$, για κάθε $x \in (2,3)$. Η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $[2,3]$ ως συνεχής συνάρτηση.

Έχουμε: $h(2) = \frac{1}{e^2} > 0$ και $h(3) = \frac{1}{e^3} - 1 = \frac{1-e^3}{e^3} < 0$

Επομένως, αφού η h είναι συνεχής στο $[2,3]$ και $h(2)h(3) < 0$, με εφαρμογή του θεωρήματος Bolzano για την h στο $[2,3]$, υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (2,3)$, τέτοιο ώστε:

$h(x_0) = 0$ και αφού η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $[2,3]$, η εξίσωση $h(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα την $x = x_0$.

Β3. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και παραγωγίσιμη με $f'(x) = -e^{-x} < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ και αφού είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ έχει σύνολο τιμών το διάστημα: $f(\mathbb{R}) = \left(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\right) = (2, +\infty)$

Επομένως, η f είναι συνάρτηση με την ιδιότητα $1-1$, άρα και αντιστρέψιμη.

Η f^{-1} έχει πεδίο ορισμού το $f(\mathbb{R}) = (2, +\infty)$.

Για να βρούμε την αντίστροφη της f θέτουμε $y = f(x)$ και λύνουμε ως προς x. Έχουμε:

$f(x) = y \Leftrightarrow e^{-x} + 2 = y, \quad \text{με } y > 2$

$\Leftrightarrow e^{-x} = y - 2\,, y > 2$

$\Leftrightarrow -x = \ln(y-2)\,, y > 2$

$\Leftrightarrow x = -\ln(y-2)\,, y > 2$

$\Leftrightarrow f^{-1}(y) = -\ln(y-2)\,, y > 2$

Επομένως: $f^{-1}(x) = -\ln(x-2)\,, x > 2$

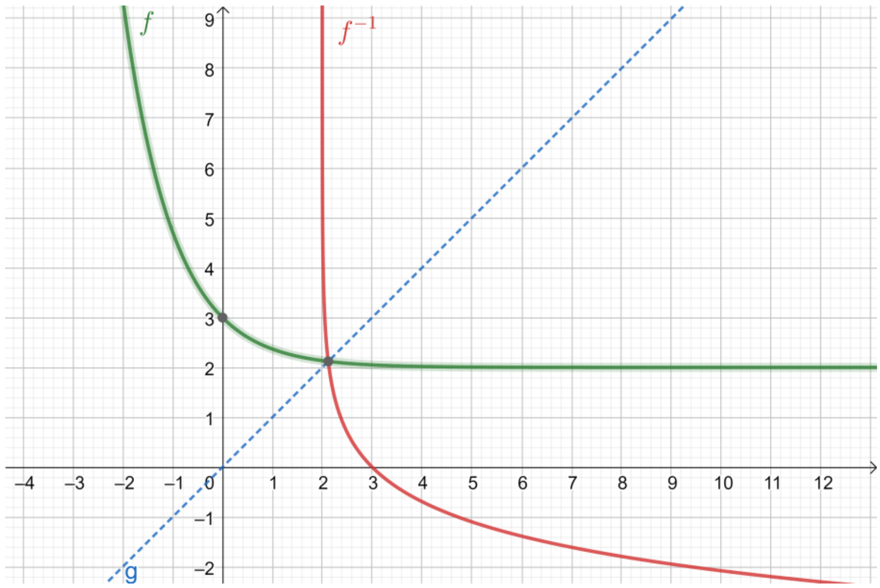
Β4. Έχουμε: $\lim\limits_{x\to2^+} f^{-1}(x) = \lim\limits_{x\to2^+}[-\ln(x-2)]$

και θέτοντας $u = x - 2$, είναι $u_0 = \lim\limits_{x\to2^+}(x-2) = 0$

άρα προκύπτει: $\lim\limits_{u\to0^+}[-\ln u] = +\infty$

Τελικά, η ευθεία $x = 2$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

Για τις γραφικές παραστάσεις των f, f^{-1} προκύπτει το ακόλουθο σχήμα:



(Γνωρίζουμε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1} έχουν άξονα συμμετρίας την ευθεία $y = x$)

Θέμα Γ
Γ1. Η f είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathbb{R}$, επομένως και στο $x_o = 1$
Άρα, είναι και συνεχής στο σημείο αυτό, συνεπώς έχουμε:
$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) \Leftrightarrow \lim_{x\to 1^-}(e^{x-1} + \beta x) = \lim_{x\to 1^+}(x^2 + a)$
$\Leftrightarrow 1 + \beta = 1 + a \Leftrightarrow a = \beta$ (1) και
$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} \Leftrightarrow \lim_{x\to 1^-}\frac{e^{x-1}+\beta x-(1+a)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{x^2+a-(1+a)}{x-1}$$
$\Leftrightarrow \lim_{x\to 1^-}\frac{e^{x-1}+\beta x-1-\beta}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{x^2+a-1-a}{x-1} \Leftrightarrow \lim_{x\to 1^-}\frac{e^{x-1}+\beta}{1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{(x+1)(x-1)}{x-1} \Leftrightarrow 1+\beta = 2 \Leftrightarrow \beta = 1$
με χρήση του κανόνα DLH για την περίπτωση $\frac{0}{0}$.
Από την (1) προκύπτει: $a = 1$.

Γ2. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty, 1)$ με $f'(x) = e^{x-1} + 1 > 0$ για κάθε $x < 1$
Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[1, +\infty)$ με $f'(x) = 2x > 0$ για κάθε $x \geq 1$
Άρα η $f'(x) > 0$ για κάθε $x\epsilon\mathbb{R}$ συνεπώς η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και συνεχής άρα έχει σύνολο τιμών $f(\mathbb{R}) = (\lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x) = \left(\lim_{x\to-\infty}(e^{x-1}+x), \lim_{x\to+\infty}(x^2+1)\right) =$
$= (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$,
αφού $\lim_{x\to-\infty} e^{x-1} = 0$, $\lim_{x\to-\infty} x = -\infty$ και $\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$.

Γ3.
i) Η f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ που περιέχει το μηδέν και είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$, άρα, υπάρχει μοναδικό $x_o\epsilon\mathbb{R}$: $f(x_o) = 0$ και $f(0) = \frac{1}{e}$.
Ισχύει $\frac{1}{e} > 0 \Leftrightarrow f(o) > f(x_o) \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} 0 > x_o$
ii) *(α' τρόπος)*
Έστω ότι η εξίσωση $f^2(x) - x_0 f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα $\rho \in (x_0, +\infty)$.
Τότε ισχύει: $f^2(\rho) - x_0 f(\rho) = 0 \Leftrightarrow f(\rho)\cdot[f(\rho) - x_0] = 0$
$\Leftrightarrow f(\rho) = 0$ ή $f(\rho) - x_0 = 0$
$\Leftrightarrow f(\rho) = f(x_0)$ ή $f(\rho) = x_0$.
Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, συνεπώς και $1-1$, η ισότητα $f(\rho) = f(x_0)$ οδηγεί στην $\rho = x_0$, το οποίο είναι άτοπο, αφού $\rho > x_0$
Αφού $x_0 < 0$, η ισότητα $f(\rho) = x_0$ οδηγεί στην ανισότητα $f(\rho) < 0 \Leftrightarrow f(\rho) < f(x_0) \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow}$ $\rho < x_0$, το οποίο είναι άτοπο, αφού $\rho > x_0$
(β' τρόπος)
Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f^2(x) - x_0 f(x)$, με $x \in [x_0, +\infty)$.
Υποθέτουμε ότι υπάρχει ένας τουλάχιστον $\rho \in (x_0, +\infty)$ τέτοιο, ώστε $g(\rho) = 0$.
- Η g είναι συνεχής στο $[x_0, \rho]$
- Η g είναι παραγωγίσιμη στο (x_0, ρ), με $g'(x) = 2f(x)f'(x) - x_0 f'(x)$
- $g(x_0) = f^2(x_0) - x_0 f(x_0) = 0$ και $g(\rho) = 0$, άρα $g(x_0) = g(\rho)$.

Από Θεώρημα Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (x_0, \rho)$:
$g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow 2f(\xi)f'(\xi) - x_0 f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi)[2f(\xi) - x_0] = 0$
και επειδή $f'(\xi) > 0$:
$$2f(\xi) - x_0 = 0 \Leftrightarrow f(\xi) = \frac{x_0}{2}$$
άτοπο, διότι $\frac{x_0}{2} < 0$ και $f(\xi) > 0$, αφού $x_0 < \xi < \rho \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(x_0) < f(\xi) \Leftrightarrow f(\xi) > 0$.

(γ' τρόπος)

Έχουμε ότι: $f^2(x) - x_0 f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x)[f(x) - x_0] = 0 \quad (1)$

Αλλά για κάθε $x > x_0 \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(x) > f(x_0) \Rightarrow f(x) > 0$ και $f(x) > 0 > x_0$. Άρα $f(x) > 0$ και $f(x) - x_0 > 0$ οπότε $f(x)[f(x) - x_0] > 0$. Άρα η εξίσωση (1) είναι αδύνατη στο $(x_0, +\infty)$.

Γ4. Έστω $M\big(x(t), y(t)\big)$ η θέση του σημείου M κάθε χρονική στιγμή $t \geq 0$ με $x(t) \geq 1$ για κάθε $t \geq 0$. Ισχύει $x(t_0) = 3$, $y(t_0) = 10$, $x'(t) = 2$ μον/sec για κάθε $t \geq 0$.
Επειδή $M \in C_f$, ισχύει $y(t) = x^2(t) + 1$ για κάθε $t \geq 0$.
Παραγωγίζοντας παίρνουμε $y'(t) = 2x(t)x'(t) \Leftrightarrow y'(t) = 4x(t)$ για κάθε $t \geq 0$.
Ισχύει $E(t) = \frac{x(t)y(t)}{2}$ για κάθε $t \geq 0$, αφού $x(t), y(t) \geq 1 > 0$ για κάθε $t \geq 0$.
Παραγωγίζοντας παίρνουμε:
$$E'(t) = \frac{1}{2}[x'(t)y(t) + y'(t)x(t)] = \frac{1}{2}[2y(t) + 4x^2(t)] = y(t) + 2x^2(t)$$
για κάθε $t \geq 0$.
Για $t = t_0$ δίνει: $E'(t_0) = y(t_0) + 2x^2(t_0) = 10 + 2 \cdot 9 = 28$ τ.μ /s.

Θέμα Δ

Δ1. Έχουμε: $f(x) = (x-1) \cdot \ln(x^2 - 2x + 2) + \alpha x + \beta, x \in \mathbb{R}$
Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ η f είναι παραγωγίσιμη με: $f'(x) = \ln(x^2 - 2x + 2) + \frac{2(x-1)^2}{x^2-2x+2} + a$
Ισχύουν τα εξής: $\begin{cases} f(1) = 1 \\ f'(1) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + \beta = 1 \\ \alpha = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 2 \\ \alpha = -1 \end{cases}$

Δ2. Για $a = -1, \beta = 2$, έχουμε: $f(x) = (x-1) \cdot \ln(x^2 - 2x + 2) - x + 2$.
Ισχύει: $E = \int_1^2 |f(x) - (-x+2)|\, dx \quad (1)$
Για κάθε $x \in [1,2]$, ισχύει:
$f(x) - (-x+2) = (x-1) \cdot \ln(x^2 - 2x + 2) = (x-1) \cdot \ln[(x-1)^2 + 1] \geq 0$
Οπότε, η (1) γίνεται:
$$E = \int_1^2 [f(x) - (-x+2)]dx = \int_1^2 (x-1) \cdot \ln(x^2 - 2x + 2)\, dx$$
Θέτουμε: $x^2 - 2x + 2 = u$, οπότε: $(2x-2)dx = du$.
Αν $x = 1$, τότε $u = 1$ και αν $x = 2$, τότε $u = 2$
και $E = \frac{1}{2}\int_1^2 \ln u \; du = \frac{1}{2}\int_1^2 (u \cdot \ln u - u)' \; du = \frac{1}{2}[u \cdot \ln u - u]_1^2 = \ln 2 - \frac{1}{2} \quad \tau.\mu.$

Δ3.

i) Για $x \in \mathbb{R}, f'(x) = \ln(x^2 - 2x + 2) + \frac{2(x-1)^2}{x^2-2x+2} - 1$ και άρα

$$f'(x) + 1 = \ln(x^2 - 2x + 2) + \frac{2(x-1)^2}{x^2 - 2x + 2} = \ln[(x-1)^2 + 1] + \frac{2(x-1)^2}{(x-1)^2 + 1} \geq 0$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$, γιατί $(x-1)^2 + 1 \geq 1$ και $\frac{2(x-1)^2}{(x-1)^2+1} \geq 0$

Οπότε: $f'(x) \geq -1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ii) *(α' τρόπος)*

$$f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) + \lambda \geq (\lambda - 1) \cdot \ln(\lambda^2 - 2\lambda + 2) + \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) \geq (\lambda - 1) \cdot \ln(\lambda^2 - 2\lambda + 2) - \lambda + \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) \geq f(\lambda) - 2 + \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) - f(\lambda) \geq -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) - f(\lambda)}{\frac{1}{2}} \geq -1, \quad (1)$$

Με εφαρμογή του θεωρήματος Μέσης Τιμής για τη συνάρτηση f στο διάστημα $\left[\lambda, \lambda + \frac{1}{2}\right]$ εξασφαλίζουμε $\xi \in (\lambda, \lambda + \frac{1}{2})$ ώστε να ισχύει $f'(\xi) = \frac{f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right) - f(\lambda)}{\frac{1}{2}}$ και άρα η (1) γράφεται ισοδύναμα: $f'(\xi) \geq -1$ που ισχύει από το ερώτημα Δ3 (i).

(β' τρόπος)

Έχουμε:

$$f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) + \lambda \geq (\lambda - 1)\ln(\lambda^2 - 2\lambda + 2) + \frac{3}{2} \Leftrightarrow f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) + \lambda \geq f(\lambda) + \lambda - \frac{1}{2}$$

$$f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) + \lambda + \frac{1}{2} \geq f(\lambda) + \lambda \quad (1)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = f(x) + x, x \in \mathbb{R}$. Η h είναι παραγωγίσιμη, με $h'(x) = f'(x) + 1 \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 1$).

Άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε:

$(1) \Leftrightarrow h\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) \geq h(\lambda) \overset{h\uparrow}{\Leftrightarrow} \lambda + \frac{1}{2} \geq \lambda \Leftrightarrow \frac{1}{2} \geq 0$ που ισχύει.

Δ4.

(α΄ τρόπος)

$g(x) = -x^3 - x + 2, x \in \mathbb{R}$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, η g είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με: $g'(x) = -3x^2 - 1$ και $g''(x) = -6x$.

Λύνουμε:

- $g''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $g''(x) > 0 \Leftrightarrow x < 0$

- $g''(x) < 0 \Leftrightarrow x > 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g''(x)$		$+$	0	$-$	
g'		$\nearrow$		$\searrow$	

Η g' παρουσιάζει στο $x = 0$ ολικό μέγιστο, άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $g'(x) \leq g'(0)$
$\Leftrightarrow g'(x) \leq -1$, με την ισότητα να ισχύει για $x = 0$.
Γνωρίζουμε όμως ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $f'(x) \geq -1$.
Αν υπάρχει κοινή εφαπτόμενη στην C_f, C_g τότε αυτή θα αναφέρεται σε σημείο με τετμημένη $x_0 = 0$. Οπότε η ευθεία αυτή έχει εξίσωση: $y - g(0) = g'(0) \cdot (x - 0)$
$\Leftrightarrow y - 2 = -x \Leftrightarrow y = -x + 2$, που είναι η κοινή εφαπτόμενη των δύο γραφικών παραστάσεων.

(β' τρόπος)
Έστω (ε_1) εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(x_1, f(x_1))$ και (ε_2) της C_g στο σημείο $B(x_2, f(x_2))$. Τότε: (ε_1): $y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1) \Leftrightarrow y = f'(x_1) \cdot x + f(x_1) - x_1 \cdot f'(x_1)$
(ε_2): $y - g(x_2) = g'(x_2)(x - x_2) \Leftrightarrow y = g'(x_2) \cdot x + g(x_2) - x_2 \cdot g'(x_2)$
Για να υπάρχει κοινή εφαπτομένη των C_f, C_g πρέπει:

$$\begin{cases} f'(x_1) = g'(x_2)\,, & (1) \\ f(x_1) - x_1 \cdot f(x_1) = g(x_2) - x_2 \cdot g(x_2), & (2) \end{cases}$$

Αλλά: $f'(x_1) \geq -1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x_1 = 1$
και $g'(x_2) = -3x_2^2 - 1 \leq -1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει μόνο $x_2 = 0$.
Άρα, η (1) ισχύει για $x_1 = 1$ και $x_2 = 0$.
Για $x_1 = 1$ και για $x_2 = 0$ ισχύει και η σχέση (2).
Οπότε η κοινή εφαπτομένη είναι:
$y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Leftrightarrow y - 1 = -(x - 1) \Leftrightarrow y = -x + 2$.