Πανελλήνιες Εξετάσεις Ημερήσιων Γενικών Λυκείων

Εξεταζόμενο Μάθημα: **Μαθηματικά Προσανατολισμού, Θετικών & Οικονομικών Σπουδών**
Ημερομηνία: 17 Ιουνίου 2020

Ενδεικτικές Απαντήσεις Θεμάτων

Θέμα Α

Α1. Απόδειξη του Θεωρήματος Ενδιαμέσων Τιμών *(σελ.76 σχολικού βιβλίου)*

Α2. Θεωρία Σχολικού Βιβλίου (*σελ. 104)*
Η f είναι **παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα** $[\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}]$ του πεδίου ορισμού της, όταν είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) και επιπλέον ισχύει:

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad \lim_{x \to \beta^-} \frac{f(x) - f(\beta)}{x - \beta} \in \mathbb{R}$$

Α3.
α. Ψευδής
β. Η συνάρτηση $f(x) = x^3$, είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, εντούτοις έχει παράγωγο $f'(x) = 3x^2$ με $f'(0) = 0$. Ενώ δηλαδή υπάρχει ένα σημείο μηδενισμού της παραγώγου η f είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$.
(Σελίδα 136 Σχολικού βιβλίου)

Α4.
α. **Λάθος**
β. **Σωστό**
γ. **Σωστό**
δ. **Σωστό**
ε. **Σωστό**

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η συνάρτηση $f \circ g$ ορίζεται αν και μόνο αν:

$$\begin{cases} x \in D_g \\ g(x) \in D_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ e^x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0, +\infty)$$

Τελικά $D_{f \circ g} = (0, +\infty)$

Ο τύπος είναι: $(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = \frac{e^x+2}{e^x-1}$ για κάθε $x > 0$

Β2. Η $f \circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με

$(f \circ g)'(x) = \frac{e^x(e^x-1)-(e^x+2)e^x}{(e^x-1)^2} = \frac{e^{2x}-e^x-e^{2x}-2e^x}{(e^x-1)^2} = -\frac{3e^x}{(e^x-1)^2}$, για κάθε $x > 0$

Ισχύει $(fog)'(x) < 0$ για κάθε $x > 0$
Συνεπώς η fog είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$
Άρα είναι και $1-1$ οπότε ορίζεται η $(f \circ g)^{-1}$.
Για να βρούμε το πεδίο ορισμού της $(f \circ g)^{-1}$, βρίσκουμε το σύνολο τιμών της $(f \circ g)^{-1}$
Η $f \circ g$ είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$.
Άρα $(f \circ g)(A) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left((f \circ g)(x),\ \lim\limits_{x\to 0^+}(f \circ g)(x)\right)$ με

- $\lim\limits_{x\to+\infty}(f \circ g)(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x+2}{e^x-1} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x\left(1+\frac{e}{e^x}\right)}{e^x\left(1-\frac{1}{e^x}\right)} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{2}{e^x}}{1-\frac{1}{e^x}} = \frac{1+0}{1-0} = 1$
- $\lim\limits_{x\to 0^+}(f \circ g)(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{e^x+2}{e^x-1} = \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{e^x-1}\cdot(e^x+2) = 3\cdot(+\infty) = +\infty$, διότι ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to 0^+}(e^x-1) = 0$ και $e^x > 1$ για $x > 0$.

Τελικά $D_{(f\circ g)^{-1}} = (f \circ g)\big(D_{f\circ g}\big) = (1, +\infty)$

Για τον τύπο της $(f \circ g)^{-1}$ θέτουμε $y = \frac{e^x+2}{e^x-1} \Leftrightarrow (e^x-1)\cdot y = e^x+2 \Leftrightarrow$

$e^x\cdot y - y = e^x + 2 \Leftrightarrow e^x\cdot y - e^x = y+2 \Leftrightarrow$

$e^x(y-1) = y+2 \overset{y>1}{\Leftrightarrow} e^x = \frac{y+2}{y-1} \Leftrightarrow$

$x = \ln\left(\frac{y+2}{y-1}\right) \Leftrightarrow f^{-1}(y) = \ln\left(\frac{y+2}{y-1}\right)$ με $\psi > 1$

$f^{-1}(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right), x > 1$

Β3. Έστω $\varphi(x) = (fog)^{-1}(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right), x > 1$
Για κάθε $x > 1$ έχουμε:

$$\varphi'(x) = \left(\ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right)\right)' = \frac{x-1}{x+2}\left(\frac{x+2}{x-1}\right)' = \frac{x-1}{x+2}\cdot\frac{x-1-x-2}{(x-1)^2} = -\frac{3}{(x+2)(x-1)} < 0$$

Άρα η $\varphi(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(1, +\infty)$

Β4.
Είναι: $\lim\limits_{x\to 1^+}\varphi(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}\left[\ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right)\right]$
Θέτουμε $u = \frac{x+2}{x-1}$
Τότε $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\frac{x+2}{x-1}\right) = \lim\limits_{x\to 1^+}\left[(x+2)\cdot\frac{1}{x-1}\right] = 3\cdot(+\infty) = +\infty$
Συνεπώς αν $x \to 1^+$ τότε $u \to +\infty$

Άρα, $\lim_{x\to 1^+}\varphi(x)=\lim_{u\to+\infty}\ln u=+\infty$.
Επιπλέον: $\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right)$
Θέτουμε $u=\frac{x+2}{x-1}$.
Τότε: $u_0=\lim_{x\to+\infty}u=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+2}{x-1}=1$
Άρα $\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim_{u\to 1}\ln u=0$

ΘΕΜΑ Γ

Η δοσμένη συνάρτηση έχει τύπο:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x}-\ln\lambda, x\le 0\\ \eta\mu x+\lambda\sigma\upsilon\nu x, \quad 0<x<\dfrac{3\pi}{2}\end{cases}$$

Γ1. Επειδή η f είναι συνεχής στο $x=0$, ισχύει:
$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^+}f(x)=f(0)\Leftrightarrow 1-\ln\lambda=\lambda\Leftrightarrow\lambda+\ln\lambda-1=0$ (1)
Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=x+\ln x-1, x>0$
Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $g'(x)=1+\frac{1}{x}>0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$
Άρα, η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$, επομένως και $1-1$
Τελικά, $(1)\Leftrightarrow g(\lambda)=g(1)\overset{1-1}{\Leftrightarrow}\lambda=1$

Γ2. Έχουμε $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{1-x}, x\le 0\\ \eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x,\ 0<x<\frac{3\pi}{2}\end{cases}$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\dfrac{1}{1-x}-1}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{1-1+x}{x(1-x)}=\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{1-x}=1$$
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\eta\mu x}{x}+\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}\right)=1+0=1$$

Αφού $\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=1\in\mathbb{R}$, η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 με $f'(0)=1$ και ορίζεται η εφαπτομένη (ε) της C_f στο σημείο $A(0,1)$, η οποία σχηματίζει με τον $x'x$ γωνία ω, τέτοια ώστε $\lambda_\varepsilon=f'(0)=\varepsilon\varphi\omega\Leftrightarrow\varepsilon\varphi\omega=1\overset{\omega\in[0,\pi)}{\Longleftrightarrow}\omega=\frac{\pi}{4}$

Γ3. Η $f(x)=\frac{1}{1-x}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty,0)$ με $f'(x)=\frac{1}{(1-x)^2}>0$, για κάθε $x\in(-\infty,0)$.
Η $f(x)=\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x$ είναι παραγωγίσιμη στο $\left(0,\frac{3\pi}{2}\right)$ με $f'(x)=\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x$.
Άρα είναι:
$f'(x)=0$ με $x\in\left(0,\frac{3\pi}{2}\right)\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x=0\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu x=\eta\mu x\Leftrightarrow\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}=1$, αφού $\eta\mu x\neq 0$
(Αν $\eta\mu x=0$, τότε $\sigma\upsilon\nu x=0$. Άτοπο, αφού ισχύει $\eta\mu^2x+\sigma\upsilon\nu^2x=1$)

Άρα $εφx = 1 \Leftrightarrow εφx = εφ\frac{π}{4} \Leftrightarrow x = κπ + \frac{π}{4}$, με $κ \in \mathbb{Z}$
$\Leftrightarrow x = \frac{π}{4}$ ή $x = \frac{5π}{4}$, αφού $x \in \left(0\,, \frac{3π}{2}\right)$
Είναι και $f'(0) = 1 \neq 0$, οπότε το $x = 0$ δεν είναι κρίσιμο σημείο.
Επειδή τα σημεία $x = \frac{π}{4}$ και $x = \frac{5π}{4}$ είναι εσωτερικά σημεία του $A_f = \left(-\infty, \frac{3π}{2}\right)$ είναι τα μοναδικά κρίσιμα σημεία της f.

Γ4. Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M\big(a, f(a)\big)$ με $a \leq 0$ έχει εξίσωση
$y - f(a) = f'(a) \cdot (x - a)$ όπου $f(a) = \frac{1}{1-a}$ και $f'(a) = \frac{1}{(1-a)^2}$
$y - \frac{1}{1-a} = \frac{1}{(1-a)^2} \cdot (x - a)$
Για $y = 0$ δίνει $-\frac{1}{1-α} = \frac{1}{(1-a)^2} \cdot x - \frac{a}{(1-a)^2} \Leftrightarrow$
$\frac{1}{(1-a)^2} \cdot x = \frac{a}{(1-a)^2} - \frac{1}{1-a} \overset{\cdot(1-a)}{\Longleftrightarrow}$
$\frac{1}{1-a} \cdot x = \frac{a}{1-a} - 1 \Leftrightarrow \frac{1}{1-a} \cdot x = \frac{2a-1}{1-a} \Leftrightarrow x = 2a - 1$
Άρα η εφαπτομένη τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $B(2a - 1{,}0)$
Κάθε χρονική στιγμή $t \geq 0$ η τετμημένη του B είναι $x_B(t) = 2a(t) - 1$
οπότε $x'_B(t) = 2a'(t) \Leftrightarrow x'_B(t) = -2\frac{a(t)}{3}$
Για $t = t_0$ δίνει $x'_B(t_0) = -\frac{2a(t_0)}{3} \Leftrightarrow x'_B(t_0) = \frac{2}{3}$, αφού $a(t_0) = -2$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με: $f'(x) = e^x + 2x - e$
Η f' είναι παραγωγίσιμη με:
$f''(x) = e^x + 2 > 0,$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
Επομένως η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Ύπαρξη ρίζας για την $\boldsymbol{f'(x) = 0}$:
[α' τρόπος]
Παρατηρούμε ότι η f είναι συνεχής στο $[0{,}1]$ και παραγωγίσιμη στο $(0{,}1)$ με $f(0) = f(1) = 0$. Επομένως, σύμφωνα με το Θεώρημα Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0{,}1)$ τέτοιο ώστε: $f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow e^{x_0} + 2x_0 - e = 0 \Leftrightarrow e^{x_0} = e - 2x_0$ **(1)**

[β' τρόπος]
Αφού η f' είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $\mathbb{R}$ το σύνολο τιμών της είναι το
$\left(\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)\,, \lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)\right) = \mathbb{R}$,
όπου
$\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (e^x + 2x - e) = -\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (e^x + 2x - e) = +\infty$

Επομένως το $y=0$ ανήκει στο σύνολο τιμών της f' οπότε υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f'(x_0)=0 \Leftrightarrow e^{x_0}=e-2x_0$ $(\mathbf{1})$.
Είναι: $f'(0)=1-e<0$ και $f'(1)=2>0$.
Άρα: $f'(0)<f'(x_0)<f'(1) \Leftrightarrow 0<x_0<1$, γιατί f' γνησίως αύξουσα.

[γ' τρόπος]
Η συνάρτηση f' είναι συνεχής στο διάστημα $[0,1]$ με
$f'(0)=1-e<0$ και $f'(1)=2>0$. Δηλαδή ισχύει: $f'(0)\cdot f'(1)<0$
Συνεπώς, από το Θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον ένας αριθμός $x_0 \in (0,1)$ τέτοιος ώστε: $f'(x_0)=0 \Leftrightarrow e^{x_0}=e-2x_0$ $(\mathbf{1})$.

Μοναδικότητα ρίζας:
Το x_0 είναι μοναδικό καθώς η συνάρτηση f' είναι γνησίως μονότονη.

Έτσι για $x<x_0$ έχουμε: $f'(x)<f'(x_0)=0$ και για $x>x_0$ έχουμε: $f'(x)>f'(x_0)=0$.
Επομένως, έχουμε τον παρακάτω πίνακα μονοτονίας-ακροτάτων:

x	0		x_0		1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	Ο.Ε.	$\nearrow$	

Άρα η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x=x_0$ το $y=f(x_0)=e^{x_0}+x_0^2-ex_0-1$ **(2).**

Όμως ισχύει από την (1): $e^{x_0}=e-2x_0$. Άρα η (2) γράφεται:
$f(x_0)=e-2x_0+x_0^2-ex_0-1 \Leftrightarrow f(x_0)=x_0^2-(e+2)x_0+e-1.$

Δ2. *[α' τρόπος]*
Ισχύει από το ερώτημα Δ1 ότι: $f(x)\geq f(x_0)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ με το ίσο να ισχύει μόνο για $x=x_0$. Οπότε $f(x)>f(x_0) \Leftrightarrow f(x)-f(x_0)>0$ κοντά στο x_0
με $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)-f(x_0)\right)=0$. Άρα: $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)-f(x_0)}=+\infty$
Είναι: $\eta\mu\left(\frac{1}{x-x_0}\right)\geq -1$ κοντά στο x_0, οπότε: $\frac{1}{f(x)-f(x_0)}+\eta\mu\left(\frac{1}{x-x_0}\right)\geq \frac{1}{f(x)-f(x_0)}-1$ κοντά στο x_0. Επειδή: $\lim\limits_{x\to x_0}\left[\frac{1}{f(x)-f(x_0)}-1\right]=+\infty$ θα είναι και $\lim\limits_{x\to x_0}\left[\frac{1}{f(x)-f(x_0)}+\eta\mu\left(\frac{1}{x-x_0}\right)\right]=+\infty$, γιατί αν ισχύει: $g(x)\geq f(x)$ κοντά στο x_0 και $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=+\infty$, τότε: $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=+\infty$.

[β' τρόπος]

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f(x)\geq f(x_0)$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=x_0$
Άρα, για $x\neq x_0$, ισχύει $f(x)>f(x_0)$ (1)

Έστω $g(x) = \frac{1}{f(x)-f(x_0)} + \eta\mu\left(\frac{1}{x-x_0}\right), x \neq x_0$
Για $x \neq x_0$ ισχύει:
$g(x) = \frac{1}{f(x)-f(x_0)} \cdot \left[1 + \left(f(x) - f(x_0)\right) \cdot \eta\mu\left(\frac{1}{x-x_0}\right)\right]$
και $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) - f(x_0)] = f(x_0) - f(x_0) = 0$
Επειδή κοντά στο x_0 ισχύει :
$f(x) > f(x_0) \Leftrightarrow f(x) - f(x_0) > 0$, είναι:
$\lim\limits_{x \to x_0} \frac{1}{f(x) - f(x_0)} = +\infty$

- Για $x \neq x_0$ ισχύει:

$\left|\left(f(x) - f(x_0)\right) \cdot \eta\mu\left(\frac{1}{x-x_0}\right)\right| = |f(x) - f(x_0)| \cdot \left|\eta\mu\left(\frac{1}{x-x_0}\right)\right| \leq |f(x) - f(x_0)| =$
$= f(x) - f(x_0)$ (από σχέση (1))

Άρα $-\left(f(x) - f(x_0)\right) \leq \left(f(x) - f(x_0)\right) \cdot \eta\mu\left(\frac{1}{x-x_0}\right) \leq f(x) - f(x_0)$
και με εφαρμογή του κριτηρίου παρεμβολής ισχύει:
$\lim\limits_{x \to x_0} \left[\left(f(x) - f(x_0)\right) \cdot \eta\mu\left(\frac{1}{(x-x_0)}\right)\right] = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \left[1 + \left(f(x) - f(x_0)\right) \cdot \eta\mu\left(\frac{1}{(x-x_0)}\right)\right] = 1$
Τελικά $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty$

Δ3. Η ζητούμενη εξίσωση γράφεται: $f(x) + x = x_o \Leftrightarrow f(x) + x - x_o = 0$

Θεωρούμε τη συνάρτηση: $h(x) = f(x) + x - x_o,\ x \in [x_0, 1]$ που σημαίνει ότι η ζητούμενη εξίσωση ισοδύναμα γράφεται: $h(x) = 0$.
Η h είναι συνεχής στο $[x_0, 1]$ και $h(x_o) \cdot\ h(1) < 0$, αφού:

- $h(x_o) = f(x_o) < f(1) = 0$
- $h(1) = f(1) + 1 - x_o = 1 - x_o > 0$

Σύμφωνα με το Θ. Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $\rho \in (x_o, 1)$ ώστε να ισχύει $h(\rho) = 0$.
Υποθέτουμε ότι υπάρχει $\xi \in (x_o, 1)$ με $\xi \neq \rho$ ώστε να ισχύει $h(\xi) = 0$.
Υποθέτουμε $\rho < \xi$ και έχουμε:

- h συνεχής στο $[\rho, \xi]$.
- h παρ/μη στο (ρ, ξ) με $h'(x) = f'(x) + 1$
- $h(\rho) = h(\xi) = 0$

Από το Θεώρημα Rolle στο διάστημα $[\rho, \xi]$ υπάρχει ένα τουλάχιστον $\mu \in (\rho, \xi)$ ώστε
$h'(\mu) = 0 \Leftrightarrow f'(\mu) + 1 = 0 \Leftrightarrow f'(\mu) = -1 < 0$, που είναι άτοπο,
εφόσον $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (x_o, 1)$.

Δ4. Από το ερώτημα Δ3 είναι: $f(\rho) = x_0 - \rho < 0$ (**3**), αφού $\rho \in (x_0, 1)$, οπότε η ζητούμενη ανισότητα γράφεται ισοδύναμα:

$$f(x_0) > f(\rho) \cdot (f'(\kappa) + 1) \overset{(3)}{\Leftrightarrow} \frac{f(x_0)}{f(\rho)} < f'(\kappa) + 1 \Leftrightarrow \frac{f(x_0)}{f(\rho)} - 1 < f'(\kappa)$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x_0) - f(\rho)}{f(\rho)} < f'(\kappa) \Leftrightarrow \frac{f(x_0) - f(\rho)}{x_0 - \rho} < f'(\kappa), \quad (\mathbf{4})$$

Αλλά η f είναι συνεχής στο $[x_0, \rho]$ και παραγωγίσιμη στο (x_0, ρ), επομένως από το Θεώρημα Μέσης Τιμής υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (x_0, \rho)$ τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(x_0) - f(\rho)}{x_0 - \rho}$$

Επομένως από τη σχέση (4) ισοδύναμα έχουμε: $f'(\xi) < f'(\kappa) \Leftrightarrow \xi < \kappa$, λόγω της μονοτονίας της f' που είναι γνησίως αύξουσα, το οποίο ισχύει, γιατί $\kappa \in (\rho, 1)$ και $x_0 < \xi < \rho < \kappa < 1$.