Πανελλήνιες Εξετάσεις Ημερήσιων Γενικών Λυκείων

Εξεταζόμενο Μάθημα: **Μαθηματικά Προσανατολισμού, Θετικών & Οικονομικών Σπουδών**
Ημερομηνία: 16 Ιουνίου 2021

Ενδεικτικές Απαντήσεις Θεμάτων

Θέμα Α
Α1. *Σχολικό βιβλίο, σελίδα 135*
Α2. *Σχολικό βιβλίο, σελίδα 51*
Α3. *Σχολικό βιβλίο, σελίδα 23*
Α4.
α. Σωστό
β. Λάθος
γ. Σωστό
δ. Σωστό
ε. Σωστό

ΘΕΜΑ Β
Β1. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x+1) = (x+1) \cdot e^{-x}$
Θέτουμε $u = x + 1$ με $u \in \mathbb{R}$
Τότε $x = u - 1$
$f(u) = u \cdot e^{-u+1}$
$f(x) = x \cdot e^{1-x}, x \in \mathbb{R}$

Β2. Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων αντίστοιχα.
$f'(x) = e^{1-x} + x \cdot e^{1-x} \cdot (-1)$
$f'(x) = e^{1-x}(1-x), x \in \mathbb{R}$
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{1-x} \cdot (1-x) = 0 \Leftrightarrow 1 - x = 0 \Leftrightarrow x = 1$
$f'(x) > 0 \Leftrightarrow e^{1-x} \cdot (1-x) > 0 \Leftrightarrow 1 - x > 0 \Leftrightarrow x < 1$
Αντίστοιχα $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x > 1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
f	$\nearrow$	Ο.Μ.	$\searrow$

Η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_0 = 1$ το $f(1) = 1$
Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 1]$.
Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1, +\infty)$.

B3. Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις παρ/μων με:

$f''(x) = -e^{1-x}(1-x) - e^{1-x} \Leftrightarrow f''(x) = e^{1-x}(x-2)$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow e^{1-x}(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 2$

$f''(x) > 0 \Leftrightarrow e^{1-x}(x-2) > 0 \Leftrightarrow x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$

$f''(x) < 0 \Leftrightarrow x < 2$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
f		Σ.Κ.	

Η f είναι κοίλη στο $(-\infty, 2]$

Η f είναι κυρτή στο $[2, +\infty)$.

Επειδή η f'' αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του $x = 2$ και ορίζεται εφαπτομένη της C_f στο σημείο αυτό, το $K\left(2, \frac{2}{e}\right)$ είναι σημείο καμπής για τη C_f.

Η C_f δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη αφού η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Είναι:

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{1-x} = +\infty$, οπότε η C_f δεν έχει ούτε πλάγια, ούτε ασύμπτωτη στο $-\infty$.

Αντίστοιχα έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}[x \cdot e^{1-x}] = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^{x-1}} \overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{\underset{D.l.H.}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^{x-1}} = 0, \text{ γιατί } \lim_{x\to+\infty} e^{x-1} = +\infty.$$

Άρα η C_f έχει οριζόντια ασύμπτωτη την $y = 0$ στο $+\infty$. (Προφανώς δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$).

B4.

i) Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $A_1 = (-\infty, 1]$ οπότε

$f(A_1) = \left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), f(1)\right] = (-\infty, 1]$

και η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $A_2 = [1, +\infty)$, οπότε

$f(A_2) = \left(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), f(1)\right] = (0,1]$

Τελικά είναι $f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) = (-\infty, 1]$.

ii) Για το πλήθος λύσεων της $f(x) = \lambda$, διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $\lambda < 0 \Rightarrow \lambda \in f(A_1)$, οπότε η εξίσωση έχει μοναδική λύση στο A_1, αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο A_1
- Αν $\lambda = 0$ τότε η εξίσωση έχει ρίζα τη $x = 0$
- Αν $0 < \lambda < 1 \Rightarrow \lambda \in f(A_1)$ και $\lambda \in f(A_2)$, οπότε η εξίσωση έχει μοναδική λύση στο A_1, αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο A_1 και αντίστοιχα η εξίσωση έχει μοναδική λύση στο A_2, αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα στο A_2. Δηλαδή αν $\lambda \in (0,1)$ η εξίσωση έχει ακριβώς δύο ρίζες, αφού $f(1) = 1 \neq \lambda$.

- Αν $\lambda = 1$, τότε η $f(x) = 1$ έχει μοναδική λύση τη $x = 1$ καθώς το $f(1) = 1$ είναι το ολικό μέγιστο της f.
- Αν $\lambda > 1$, τοτε η $f(x) = \lambda$ είναι αδύνατη γιατί το λ δεν ανήκει στο σύνολο τιμών της συνάρτησης ($\lambda \notin f(A_1)$, $\lambda \notin f(A_2)$ ή $\lambda \notin f(A)$).

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η f είναι συνεχής για $x < 0$ ως πολυωνυμική και για $x \in (0, \frac{3\pi}{2}]$ ως τριγωνομετρική.

Στο $x_0 = 0$:

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (ax^3 - 3x^2 - x + 1) = 1$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (\sigma\upsilon\nu x) = 1$

και $f(0) = 1$, αφού $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$, η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$. Συνεπώς η f είναι συνεχής στο $\left(-\infty, \frac{3\pi}{2}\right]$.

Για την παραγωγισιμότητα στο $x_0 = 0$:

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{ax^3 - 3x^2 - x}{x} = \lim_{x \to 0^-} (ax^2 - 3x - 1) = -1$$

ενώ:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 0$$

Συνεπώς $\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \neq \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$, άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

Γ2.

i) Η f είναι συνεχής στο $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$ λόγω του ερωτήματος Γ1.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$ με $f'(x) = (\sigma\upsilon\nu x)' = -\eta\mu x$.

Τέλος:

$f(0) = 1$ ενώ $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \sigma\upsilon\nu \frac{3\pi}{2} = 0$

Συνεπώς $f(0) \neq f\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ άρα η f δεν ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$

ii) Για κάθε $x \in \left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$, έχουμε:

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\eta\mu x = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x = 0 \Leftrightarrow x = \pi$, αφού $x \in \left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$

Συνεπώς, το μοναδικό $\xi \in \left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$ για το οποίο ισχύει $f'(\xi) = 0$ είναι το $\xi = \pi$.

Γ3. Είναι $f'(x) = 3\alpha x^2 - 6x - 1$, για κάθε $x < 0$ το οποίο είναι πολυώνυμο 2ου βαθμού με διακρίνουσα $\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-1) = 36 + 12\alpha = 12(3 + \alpha) < 0$, αφού $\alpha < -3$.

Συνεπώς η εξίσωση: $f'(x) = 0$ δεν έχει ρίζες στο $(-\infty, 0)$ άρα η C_f δε δέχεται εφαπτομένη παράλληλη στον $x'x$ σε σημεία με αρνητική τετμημένη.

Γ4. Ισχύει ότι $f'(x) = \begin{cases} 3ax^2 - 6x - 1, x < 0 \\ -\eta\mu x, 0 < x \leq \frac{3\pi}{2} \end{cases}$.

Επειδή ισχύει ότι $f'(x) < 0$ για κάθε $x < 0$ η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 0]$, αφού η f είναι συνεχής στο $x = 0$. Οπότε για κάθε $x \leq 0$ έχουμε $f(x) \geq f(0) \Leftrightarrow f(x) \geq 1$.
Επιπλέον, ισχύει ότι $\sigma\upsilon\nu x \geq -1$ για κάθε $x \in \left(0, \frac{3\pi}{2}\right]$ δηλαδή $f(x) \geq -1$ για κάθε $x \in \left(0, \frac{3\pi}{2}\right]$.
Τελικά, ισχύει ότι $f(x) \geq -1$ για κάθε $x \in \left(-\infty, \frac{3\pi}{2}\right]$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Θεωρούμε τη συνάρτηση $K(x) = \ln x - \frac{1}{x}$, $x > 0$ η οποία είναι παραγωγίσιμη με $K'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} > 0$ για κάθε $x > 0$. Επομένως, η συνάρτηση K είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

Παρατηρούμε ότι: $K(1) = -1 < 0$ και $K(e) = 1 - \frac{1}{e} = \frac{e-1}{e} > 0$, δηλαδή $K(1) \cdot K(e) < 0$.
Εφόσον η f είναι συνεχής στο διάστημα $[1, e]$, από το Θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (1, e)$ τέτοιο ώστε
$K(x_0) = 0 \Leftrightarrow \ln x_0 = \dfrac{1}{x_0} \quad (\mathbf{1})$

Η ρίζα x_0 είναι μοναδική εφόσον η συνάρτηση έχει την ιδιότητα 1-1.

Διαφορετικά

Η ύπαρξη της ρίζας μπορεί να προκύψει από εύρεση συνόλου τιμών της συνάρτησης K.
Εφόσον η K είναι γνησίως αύξουσα στο $\Delta = (0, +\infty)$ το σύνολο τιμών της είναι
$K(\Delta) = \left(\lim\limits_{x \to 0^+} K(x), \lim\limits_{x \to +\infty} K(x)\right) = \mathbb{R}$, όπου περικλείεται η τιμή $y = 0$.

Δ2. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με:

$$f'(x) = \ln x_0 - \frac{1}{x} = \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x} = \frac{x - x_0}{x \cdot x_0}, \qquad \text{λόγω της } (1)$$

Λύνουμε την εξίσωση: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_0$ και την ανίσωση: $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > x_0$ οπότε προκύπτει ο πίνακας μονοτονίας ακροτάτων για την f

x	0		x_0		e
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	Ο.Ε.	$\nearrow$	

Επομένως, η f παρουσιάζει στο x_0 ολικό ελάχιστο το

$f(x_0) = \ln x_0 \cdot (x_0 + 1) - \ln x_0 - 1 \Leftrightarrow f(x_0) = x_0 \cdot \ln x_0 - 1 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} f(x_0) = 1 - 1 = 0$

Άρα, ισχύει $f(x) \geq f(x_0) \Leftrightarrow f(x) \geq 0$ για κάθε $x > 0$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = x_0 \in (1, e)$.

Δ3. Λύνουμε αρχικά την εξίσωση $g(x) = h(x)$.

Είναι: $g(x) = h(x) \Leftrightarrow \ xe^{-x} = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1}$ πρέπει $x > 0$ γιατί $\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1} > 0$

Οπότε: $\ln(xe^{-x}) = \ln\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1}$

$\Leftrightarrow \ln x - x = (x+1)\ln\left(\dfrac{x_0}{e}\right)$

$\Leftrightarrow \ln x - x = (x+1)\ln x_0 - 1 \Leftrightarrow \ln x - x = (x+1)\ln x_0 - x - 1 \Leftrightarrow$

$(x+1)\ln x_0 - \ln x - 1 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_0$ με βάση το ερώτημα Δ2.

Άρα οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων g και h έχουν μοναδικό κοινό σημείο $A(x_0, g(x_0))$.

Θα ελέγξουμε ότι στο κοινό αυτό σημείο έχουν κοινή εφαπτομένη.

Αρκεί να δείξουμε ότι $g'(x_0) = h'(x_0)$

Έχουμε ότι:

$g'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x}, x \in \mathbb{R}$

και

$h'(x) = \left(\dfrac{x_0}{e}\right)^{x+1} \ln\dfrac{x_0}{e}, x \in \mathbb{R}$

Συνεπώς, είναι:

$g'(x_0) = e^{-x_0} - x_0 e^{-x_0} = \dfrac{1 - x_0}{e^{x_0}}\ (\alpha)$

και

$h'(x_0) = \left(\dfrac{x_0}{e}\right)^{x_0+1} \ln\dfrac{x_0}{e} = \left(\dfrac{x_0}{e}\right)^{x_0+1} (\ln x_0 - 1)$

$\overset{(1)}{\Rightarrow} h'(x_0) = \left(\dfrac{x_0}{e}\right)^{x_0+1} \left(\dfrac{1}{x_0} - 1\right) = \dfrac{x_0^{x_0+1}}{e^{x_0+1}} \left(\dfrac{1 - x_0}{x_0}\right) = \dfrac{x_0^{x_0}}{e} \cdot \dfrac{1 - x_0}{e^{x_0}}\ (\beta)$

Όμως από τη σχέση (1) έχουμε ότι

$\ln x_0 = \dfrac{1}{x_0} \Leftrightarrow x_0 \ln x_0 = 1 \Leftrightarrow \ln x_0^{x_0} = 1 \Leftrightarrow x_0^{x_0} = e \Leftrightarrow \dfrac{x_0^{x_0}}{e} = 1\ (\gamma)$

Επομένως, συνδυάζοντας τις σχέσεις (β) και (γ) έχουμε ότι $h'(x_0) = \frac{1-x_0}{e^{x_0}} = g'(x_0)$.

Τελικά οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων g και h έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, το $A(x_0, g(x_0))$ στο οποίο έχουν και κοινή εφαπτομένη.

Δ4. Γνωρίζουμε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει: $f(x) > \varphi(x)$, (2)

Η απόσταση των σημείων A, B δίνεται από τη συνάρτηση

$d(x) = \sqrt{\left(\varphi(x) - f(x)\right)^2 + (x-x)^2}$

$\Leftrightarrow d(x) = |\varphi(x) - f(x)|$

$\Leftrightarrow d(x) = f(x) - \varphi(x)$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν η συνάρτηση φ δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0, τότε το x_0 είναι κρίσιμο σημείο αυτής.
- Η συνάρτηση φ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και παρουσιάζει ελάχιστη τιμή στο $x = x_0$, το οποίο είναι εσωτερικό σημείο του $(0, +\infty)$ από το θεώρημα Fermat ισχύει:
  $d'(x_0) = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) = \varphi'(x_0)$, (3)
  Με βάση το ερώτημα Δ2, από τη σχέση (3) προκύπτει: $\varphi'(x_0) = 0$, οπότε το $x_0 \in (0, +\infty)$ είναι κρίσιμο σημείο της φ, (αφού είναι εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού και ρίζα της $\varphi(x) = 0$).