Πανελλήνιες Εξετάσεις Ημερήσιων Γενικών Λυκείων

Εξεταζόμενο Μάθημα: **Μαθηματικά Προσανατολισμού, Θετικών & Οικονομικών Σπουδών**

Ημερομηνία: 6 Ιουνίου 2022

Ενδεικτικές Απαντήσεις Θεμάτων

Θέμα Α

Α1. *Σχολικό βιβλίο, σελίδα 186*

Α2. *Σχολικό βιβλίο, σελίδα 142*

Α3. *Σχολικό βιβλίο, σελίδα 161*

Α4.

α. Σωστό
β. Σωστό
(Αν ήταν $f(0) = f(1)$ από το Θεώρημα Rolle θα υπήρχε x_0 με $f(x_0) = 0$. Άτοπο)
γ. Σωστό
δ. Λάθος
ε. Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1. Έχουμε: $D_f = (-\infty, 1]$ με $f(x) = (x^2 - 1)^2$ και $D_g = [0, +\infty)$

Για να ορίζεται η $h = f \circ g$ πρέπει και αρκεί:
$\{x \in D_g$ και $g(x) \in D_f\} = \{x \geq 0$ και $\sqrt{x} \leq 1\} = [0,1]$

Άρα, $D_h = [0,1]$ και έχει τύπο:

$h(x) = (f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = \left[\left(\sqrt{x}\right)^2 - 1\right]^2 = (x-1)^2, x \in [0,1]$

Β2. Η h είναι συνεχής στο $[0,1]$ και για κάθε $x \in (0,1)$ με $h'(x) = 2(x-1) < 0$.

Άρα η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,1]$, επομένως "$1-1$" και συνεπώς αντιστρέψιμη.

Επειδή η h είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $[0,1]$, έχουμε:

$h([0,1]) = [h(1), h(0)] = [0,1] = D_{h^{-1}}$

Θέτουμε $y = h(x) \Leftrightarrow y = (x-1)^2$

Συνεπώς: $\sqrt{y} = |x-1|$ και επειδή $x \in [0,1]$, παίρνουμε:

$\sqrt{y} = -x + 1 \Leftrightarrow x = 1 - \sqrt{y} \Leftrightarrow h^{-1}(y) = 1 - \sqrt{y}, y \in [0,1]$

Άρα: $h^{-1}(x) = 1 - \sqrt{x}, x \in [0,1]$

Β3. Είναι:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x}, x \in [0,1) \\ \dfrac{1}{2}, \quad x = 1 \end{cases}$$

i. Ελέγχουμε αν η φ είναι συνεχής στο $[0,1]$:

Είναι συνεχής στο$[0,1)$, ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων:

$\lim\limits_{x\to 1^-} \varphi(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{1}{1+\sqrt{x}} = \frac{1}{2} = \varphi(1)$, επομένως η φ είναι συνεχής στο $x = 1$ και τελικά συνεχής στο $[0,1]$

Επίσης: $\varphi(0) = 1$ και $\varphi(1) = \frac{1}{2}$.

Επομένως, $\varphi(0) \neq \varphi(1)$ άρα ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Ενδιαμέσων Τιμών στο $[0,1]$.

ii. Εφόσον πληρούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Ενδιαμέσων Τιμών, για κάθε αριθμό η μεταξύ του $\varphi(1) = \frac{1}{2}$ και $\varphi(0) = 1$ υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $\varphi(x_0) = \eta$.

Για κάθε $\alpha \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$ έχουμε: $\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{2} \xLeftrightarrow{\eta\mu x \uparrow [0,\frac{\pi}{2}]} \eta\mu\frac{\pi}{6} < \eta\mu\alpha < \eta\mu\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} < \eta\mu\alpha < 1$.

Συνεπώς, για $\eta = \eta\mu\alpha$ προκύπτει ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0,1)$ έτσι ώστε $\varphi(x_0) = \eta\mu\alpha$, όπου $\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Για $x < -1$ είναι: $f'(x) = -2$, επομένως υπάρχει $c_1 \in \mathbb{R}$ ώστε:

$$f(x) = -2x + c_1 \text{ για κάθε } x < -1.$$

Για $x > -1$ είναι: $f'(x) = 3x^2 - 1$, επομένως υπάρχει $c_2 \in \mathbb{R}$ ώστε:

$$f(x) = x^3 - x + c_2 \text{ για κάθε } x > -1.$$

Όμως: $O(0,0) \in C_f$. Άρα: $f(0) = 0 \Leftrightarrow c_2 = 0$.

Οπότε:

$$f(x) = \begin{cases} -2x + c_1, & x \leq -1 \\ x^3 - x, & x > -1 \end{cases}$$

Όμως η f είναι συνεχής στο $x = -1$, άρα:

- $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) \Leftrightarrow 2 + c_1 = 0 \Leftrightarrow c_1 = -2$
- $f(-1) = \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = 0$

Τελικά:

$$f(x) = \begin{cases} -2x - 2, & x \leq -1 \\ x^3 - x, & x > -1 \end{cases}$$

Γ2.

i) Η εφαπτομένη της C_f στο $A(x_0, f(x_0))$ είναι: $(\varepsilon)\colon y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$, (1), όπου $f(x_0) = x_0^3 - x_0$ και $f'(x_0) = 3x_0^2 - 1$, εφόσον $x_0 > -1$.

Οπότε: (1) $\Leftrightarrow y - x_0^3 + x_0 = (3x_0^2 - 1)(x - x_0)$

Αφού $\Gamma(0, -2) \in C_f$ θα είναι:

$$-2 - x_0^3 + x_0 = (3x_0^2 - 1)(-x_0)$$
$$\Leftrightarrow -2 - x_0^3 + x_0 = -3x_0^3 + x_0$$
$$\Leftrightarrow 2x_0^3 = 2$$
$$\Leftrightarrow x_0 = 1, \text{αφού } x_0 > -1$$

Τελικά, η εξίσωση της εφαπτομένης είναι :

$$y = 2(x - 1) \Leftrightarrow y = 2x - 2$$

Γ3.

Έστω $M(x(t), y(t))$ η θέση του σημείου M κάθε χρονική στιγμή $t \geq 0$ με $x(t) > 2$ και $x'(t) = 2\ \mu o\nu/s$. Το εμβαδό του, ορθογωνίου στο Γ, τριγώνου είναι: $(MK\Gamma) = \frac{1}{2}\ (K\Gamma)(KM)$ και για κάθε χρονική στιγμή t δίνεται από τη συνάρτηση:

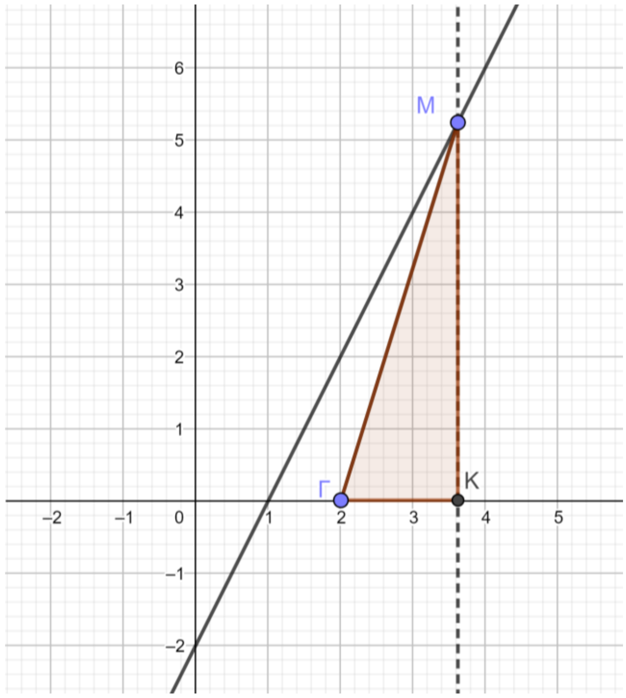
$$E(t) = \frac{1}{2}(x(t) - 2) \cdot y(t)$$
$$\Leftrightarrow E(t) = \frac{1}{2}(x(t) - 2)(2(x(t) - 2)$$
$$\Leftrightarrow E(t) = x^2(t) - 3x(t) + 2, \ \ t \geq 0$$

Η $E(t)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με:

$$E'(t) = 2x(t) \cdot x'(t) - 3x'(t) = 4x(t) - 6$$

Τη χρονική στιγμή t_0 ισχύει: $x(t_0) = 3$ άρα

$E'(t_0) = 6\ \tau\varepsilon\tau.\mu o\nu./s$



Γ4. Ισχύει για $x < 0$:

$$\left|\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)}\right| \leq \frac{1}{|f(x)|} = \frac{1}{|-2x - 2|} = \frac{1}{2|x + 1|}$$

με

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{2|x + 1|} = 0$$

Άρα, σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\eta\mu f(x)}{f(x)} = 0, \qquad (1)$$

Επίσης, όταν $x \to -\infty$ είναι για $x < 1 \Leftrightarrow -x > -1$ οπότε:

$$\frac{f(-x)}{1-x^3} = \frac{-x^3+x}{1-x^3} = \frac{x^3-x}{x^3-1}$$

Οπότε:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(-x)}{1-x^3} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-x}{x^3-1} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x^3} = 1, \quad (2)$$

Άρα, τελικά από τις (1) και (2):

$$\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)} + \frac{f(-x)}{1-x^3}\right] = 0+1 = 1$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. i) Έχουμε την εξίσωση $f(x) = 0$ η οποία γράφεται ισοδύναμα $x - \ln(3x) = 0$.

Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f'(x) = 1 - \frac{1}{x}$.

Έχουμε $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$ και $f'(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$

Έτσι, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$.

Έχουμε f συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$ επομένως
$f\big((0,1]\big) = [f(1), \lim\limits_{x\to0^+} f(x)) = [1 - \ln 3\,, +\infty)$ αφού $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+}(x - \ln(3x)) = +\infty$ διότι $\lim\limits_{x\to0^+}\ln(3x) = -\infty$.

Επίσης, f συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$ επομένως
$f\big([1, +\infty)\big) = [f(1), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)) = [1 - \ln 3\,, +\infty)$ αφού

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(x - \ln(3x)) = \lim_{x\to+\infty} x\left(1 - \frac{\ln(3x)}{x}\right) = (+\infty)(1-0)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln 3x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{3x}3}{1} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0$ εφαρμόζοντας τον κανόνα De L' Hospital.

- $0 \in f\big((0,1]\big)$ (αφού $1 - \ln 3 < 0 \Leftrightarrow \ln e < \ln 3$) άρα υπάρχει $x_1 \in (0,1)$ με $f(x_1) = 0$ (είναι $x_1 \neq 1$ αφού $f(1) < 0$). Το x_1 είναι μοναδική λύση της $f(x) = 0$ στο $(0,1]$ αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα.
- $0 \in f\big([1, +\infty)\big)$ άρα υπάρχει $x_2 \in (1, +\infty)$ με $f(x_2) = 0$ (πάλι είναι $x_2 \neq 1$ αφού $f(1) < 0$). Το x_2 είναι μοναδική λύση της $f(x) = 0$ στο $(1, +\infty)$ αφού η f είναι γνησίως αύξουσα.

ii) Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με $f''(x) = \frac{1}{x^2} > 0$ άρα η f είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$.

Δ2. Η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $(x_1, 0)$ και $(x_2, 0)$
με $x_1 < x_2$.

Η f είναι συνεχής στο (x_1, x_2) με $x_1 < x_2$ και δε μηδενίζεται επομένως διατηρεί πρόσημο στο (x_1, x_2). Είναι $1 \in (x_1, x_2)$ και $f(1) < 0$ άρα $f(x) < 0$ στο (x_1, x_2), οπότε $f(x) \leq 0$ για κάθε $x \in [x_1, x_2]$. Έτσι,

$$E = \int_{x_1}^{x_2} |f(x)| dx = -\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = -\int_{x_1}^{x_2} (x)' f(x) dx = -[xf(x)]_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} x f'(x) dx$$
$$= -\big(x_2 f(x_2) - x_1 f(x_1)\big) + \int_{x_1}^{x_2} x\left(1 - \frac{1}{x}\right) dx = 0 + \int_{x_1}^{x_2} x\left(1 - \frac{1}{x}\right) dx = \int_{x_1}^{x_2} (x-1) dx$$
$$= \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_{x_1}^{x_2} = \frac{1}{2}(x_2 - x_1)(x_1 + x_2 - 2)$$

που είναι το ζητούμενο εμβαδόν.

Δ3. Από το προηγούμενο ερώτημα έχουμε ότι $E > 0$ και $x_2 - x_1 > 0$ άρα $x_1 + x_2 - 2 > 0$ επομένως:

$x_2 > 2 - x_1$

Επίσης έχουμε $2 - x_1 > 1 \Leftrightarrow x_1 < 1$ που ισχύει. Επομένως

$x_2 > 2 - x_1 > 1, \qquad (1)$

και η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(1, +\infty)$ άρα

$(1) \Leftrightarrow f(x_2) > f(2 - x_1) \Leftrightarrow f(2 - x_1) < 0$

Δ4. Έχουμε ότι η f είναι κυρτή επομένως η γραφική παράσταση της f είναι πάνω από κάθε εφαπτομένη της με εξαίρεση το σημείο επαφής. Η εφαπτομένη της f στο σημείο $A\big(x_2, f(x_2)\big) = A(x_2, 0)$ είναι η $y - 0 = f'(x_2)(x - x_2) \Leftrightarrow y = f'(x_2)(x - x_2)$.

Άρα έχουμε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει $f(x) \geq y$ δηλαδή

$f(x) \geq f'(x_2)(x - x_2), \qquad (2)$

Όπου η ισότητα ισχύει μόνο για $x = x_2$.

Επίσης η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο μόνο στη θέση $x = 1$ το οποίο είναι ίσο με $f(1) = 1 - \ln 3$. Επομένως, για κάθε $x > 0$ έχουμε

$f(x) \geq 1 - \ln 3, \quad (3)$

και η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 1$.

Η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα:

$2f(x) + \ln 3 = 1 + f'(x_2)(x - x_2) \Leftrightarrow f(x) - [f'(x_2)(x - x_2)] = (1 - \ln 3) - f(x), (4)$

Με βάση τα παραπάνω, το αριστερό μέλος της (4) είναι μεγαλύτερο ή ίσο του 0 και η ισότητα ισχύει μόνο για $x = x_2$, ενώ το δεξί μέλος είναι μικρότερο ή ίσο του 0 και η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 1$.

Επομένως η (4) είναι αδύνατη, αφού $x_2 \neq 1$.