

Πανελλήνιες Εξετάσεις Ημερήσιων Γενικών Λυκείων

Εξεταζόμενο Μάθημα: Μαθηματικά Προσανατολισμού,

Θετικών & Οικονομικών Σπουδών

Ημερομηνία: 6 Ιουνίου 2023

Ενδεικτικές Απαντήσεις Θεμάτων

Θέμα Α

A1. Σχολικό βιβλίο, σελίδα 111

A2. Σχολικό βιβλίο, σελίδα 104

A3. Σχολικό βιβλίο, σελίδα 128

A4.

α. Λάθος

β. Λάθος

γ. Λάθος

δ. Σωστό

ε. Σωστό

ΘΕΜΑ Β

B1. Για το πεδίο ορισμού της σύνθεσης έχουμε:

$$A_{g \circ h} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in A_h \text{ και } h(x) \in A_g\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \text{ και } \ln x \in \mathbb{R}\} = (0, +\infty)$$

Ο τύπος της συνάρτησης είναι:

$$(g \circ h)(x) = g(h(x)) = \frac{4 - e^{2 \ln x}}{e^{\ln x}} = \frac{4 - e^{\ln x^2}}{e^{\ln x}} = \frac{4 - x^2}{x}, \quad x > 0$$

B2.

i. Η f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ ως ημίγειρο συνεχών και παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ ως ημίγειρο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x) = \frac{-2x \cdot x - (4 - x^2)}{x^2} = \frac{-2x^2 - 4 + x^2}{x^2} = \frac{-x^2 - 4}{x^2} < 0, \text{ για κάθε } x > 0$$

Επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$.

ii. Αρκεί να δείξουμε ότι:

$$\frac{4 - \pi^2}{4 - e^2} > \frac{\pi}{e} \iff \frac{4 - \pi^2}{\pi} < \frac{4 - e^2}{e} \iff f(\pi) < f(e)$$

Ισχύει ότι $\pi > e$ και η f γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$ συνεπώς $f(\pi) < f(e)$.

B3.

Η συνάρτηση f ορίζεται στο $(0, +\infty)$.

• Αναζητούμε κατακόρυφη ασύμπτωτη στο $x = 0$:

Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4 - x^2}{x} = +\infty$$

Άρα, η ευθεία $x = 0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f .

- Αναζητούμε πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ της μορφής $y = \lambda x + \beta$

Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 - x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 - x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2}{x^2} = -1 = \lambda$$

Επίσης:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \lambda x] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{4 - x^2}{x} + x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{4 - x^2 + x^2}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Άρα, η ευθεία $y = -x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

B' Τρόπος: Παρατηρούμε ότι: $f(x) = \frac{4}{x} - x \Leftrightarrow f(x) + x = \frac{4}{x}$

Είναι: $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x} = 0$ οπότε η ευθεία $y = -x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

B4.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x) = \frac{1}{f(x)} \sin(1 + x^2)$ για x κοντά στο $+\infty$ για την οποία ισχύει:

$$|\varphi(x)| = \left| \frac{1}{f(x)} \cdot \sin(1 + x^2) \right| = \left| \frac{1}{f(x)} \right| \cdot |\sin(1 + x^2)| \leq \left| \frac{1}{f(x)} \right| \cdot 1$$

$$\Leftrightarrow -\left| \frac{1}{f(x)} \right| \leq \varphi(x) \leq \left| \frac{1}{f(x)} \right|, \quad (1)$$

Όμως:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{4 - x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{-x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{-x} = 0$$

Επομένως $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left| \frac{1}{f(x)} \right| = 0$.

Άρα, με εφαρμογή του κριτηρίου παρεμβολής: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η f είναι συνεχής στο $[2,3]$ αφού $f(x) = \frac{1}{x} + a$ για κάθε $x \in [2,3]$ και είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων. Ακόμα:

$$\int_2^3 x f(x) dx = 1 \Leftrightarrow \int_2^3 (1 + ax) dx = 1$$

$$\Leftrightarrow \left[x + \frac{ax^2}{2} \right]_2^3 = 1 \Leftrightarrow 3 + \frac{9a}{2} - 2 - 2a = 1 \Leftrightarrow 1 + \frac{5a}{2} = 1 \Leftrightarrow a = 0$$

Γ2. i) Είναι $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{1}{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1 - x}{x(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} -\frac{1}{x} = -1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x - 2) = -1$$

Οπότε ορίζεται η $f'(1)$ και είναι $f'(1) = -1$.

ii) Επειδή $f(1) = \frac{1}{1} + a = 1$, αφού $a = 0$, η εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο $(1,1)$ είναι:

$$y - 1 = -1(x - 1) \Leftrightarrow y = -x + 2$$

Και η γωνία που σχηματίζεται με τον $x'x$ είναι $\frac{3\pi}{4}$ rad αφού $f'(1) = -1$

$\Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega = -1, \omega \in [0, \pi)$, όπου ω η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη με τον $x'x$.

Γ3. Η f είναι παραγωγίσιμη στο 1, άρα και συνεχής εκεί.

Είναι:

- για κάθε $x < 1$: $f'(x) = 2x - 3$ και $x < 1 \Leftrightarrow 2x < 2 \Leftrightarrow 2x - 3 < -1 < 0$
- για κάθε $x > 1$: $f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$

Συνεπώς, $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{1\}$ κι επειδή η f είναι συνεχής στο $x = 1$ θα είναι γνησίως φθίνουσα στο \mathbb{R} , άρα και «1-1»

Για το σύνολο τιμών της f είναι: $f((-\infty, +\infty)) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right) = (0, +\infty)$

αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα και

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

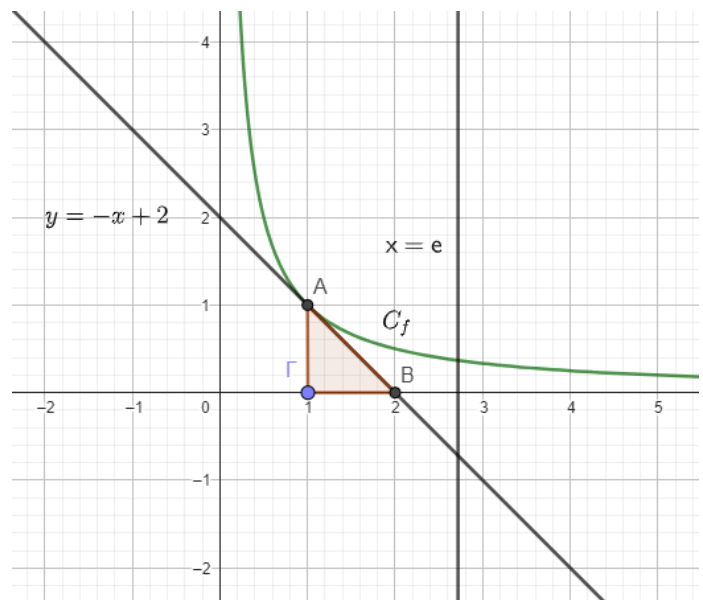
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 3x + 3) = +\infty$$

Γ4.

Το χωρίο μεταξύ της C_f , της εφαπτομένης στο σημείο $(1, f(1))$ και του άξονα $x'x$ φαίνεται στο παραπάνω σχήμα. Αρκεί να υπολογίσουμε το:

$\int_1^e f(x) dx - (AB\Gamma)$, αφού για κάθε $x \geq 1$ είναι $f(x) = \frac{1}{x} > 0$ και όπως φαίνεται κι απ' το σχήμα η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη της στο σημείο A , οπότε:

$$\begin{aligned} E(\Omega) &= \int_1^e f(x) dx - (AB\Gamma) \\ &= \int_1^e \frac{1}{x} dx - \frac{(A\Gamma)(B\Gamma)}{2} = [\ln|x|]_1^e - \frac{1 \cdot 1}{2} \end{aligned}$$



$$= \ln e - \ln 1 - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ τ. μ.}$$

$$E = \int_1^e (f(x) + x - 2) dx - \frac{(\Gamma\Delta) \cdot (B\Delta)}{2} = \left[\ln|x| + \frac{x^2}{2} - 2x \right]_1^e - \frac{(e-2) \cdot (e-2)}{2}$$

$$= 1 + \frac{e^2}{2} - 2e - \frac{1}{2} + 2 - \frac{(e-2)^2}{2} = \frac{e^2 - 4e + 5}{2} - \frac{e^2 - 4e + 4}{2} = \frac{1}{2} \text{ τ. μ.}$$

με B να είναι το σημείο τομής της $y = -x + 2$ και της $x = e$, οπότε το $B(e, 2 - e)$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Είναι $f(1) = k - 1$ και η f συνεχής στο $x = 1$ άρα $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x) - 2x}{x-1}$, $x \in (0,1) \cup (1,2)$ με $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \ell \in \mathbb{R}$.

Τότε $f(x) = g(x)(x-1) + 2x \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (g(x)(x-1) + 2x) = \ell \cdot 0 + 2 = 2$

Τελικά $f(1) = k - 1 = 2 \Leftrightarrow k = 3$.

Δ2. Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0,2)$ με

$$f'(x) = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x^2} = \frac{(x-1)(x+2)}{x^2(x-2)}$$

Είναι $x \in (0,2)$ επομένως $x - 2 < 0$, $x + 2 > 0$, $x^2 > 0$.

Έτσι έχουμε $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0,1)$ και $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$.

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,1]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[1, +\infty)$.

Για το σύνολο τιμών έχουμε:

$$f((0,1]) = \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), f(1) \right] = (-\infty, 2]$$

αφού $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\ln(2-x) - \frac{1}{x} + 3 \right) = -\infty$. Επίσης

$$f((1, +\infty)) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \right) = (-\infty, 2)$$

αφού $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln(2-x) - \frac{1}{x} + 3 \right) = -\infty$.

Είναι $0 \in f((0,1])$ και f γνησίως μονότονη στο $(0,1]$ επομένως υπάρχει μοναδικό $x_1 \in (0,1]$ με $x_1 \neq 1$ τέτοιο ώστε $f(x_1) = 0$

Επίσης είναι $0 \in f((1, +\infty))$ και f γνησίως μονότονη στο $(1, +\infty)$ επομένως υπάρχει μοναδικό $x_2 \in (1, +\infty)$ τέτοιο ώστε $f(x_2) = 0$.

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,1)$ και $x_1, \frac{1}{3} \in (0,1)$ επομένως αφού $f\left(\frac{1}{3}\right) = \ln\left(\frac{5}{3}\right) > 0$ θα έχουμε:

$$f\left(\frac{1}{3}\right) > 0 \Leftrightarrow f\left(\frac{1}{3}\right) > f(x_1) \Leftrightarrow \frac{1}{3} > x_1$$

Δ3. Α' τρόπος:

- f συνεχής στο $\left[x_1, \frac{1}{3}\right]$ ως πράξεις και σύνθεση συνεχών συναρτήσεων
- f παραγωγίσιμη στο $\left(x_1, \frac{1}{3}\right)$ με $f'(x) = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x^2}$

Επομένως σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής, υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in \left(x_1, \frac{1}{3}\right)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \frac{f\left(\frac{1}{3}\right) - f(x_1)}{\frac{1}{3} - x_1} = \frac{3f\left(\frac{1}{3}\right)}{1 - 3x_1}$

Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $(0,2)$ με $f''(x) = -\frac{1}{(x-2)^2} - \frac{2}{x^3} < 0$ επομένως η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1)$. Επομένως, υπάρχει μοναδικό $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \frac{3f\left(\frac{1}{3}\right)}{1 - 3x_1}$ δηλαδή η κλίση της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ ισούται με $\frac{3f\left(\frac{1}{3}\right)}{1 - 3x_1}$.

B' τρόπος: Έχουμε την εξίσωση $f'(x) = \frac{3f\left(\frac{1}{3}\right)}{1 - 3x_1}$. Είναι $f\left(\frac{1}{3}\right) > 0 \Rightarrow 3f\left(\frac{1}{3}\right) > 0$ και $\frac{1}{3} > x_1$

$\Rightarrow 1 - 3x_1 > 0$ οπότε $\frac{3f\left(\frac{1}{3}\right)}{1 - 3x_1} > 0$. Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $(0,2)$ με $f''(x) = -\frac{1}{(x-2)^2} - \frac{2}{x^3} < 0$ επομένως η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1)$.

Έτσι: $f'((0,1)) = \left(\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x), \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x)\right) = (0, +\infty)$

αφού $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x^2}\right) = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x^2}\right) = 0$.

Είναι: $\frac{3f\left(\frac{1}{3}\right)}{1 - 3x_1} \in f'((0,1))$ και f' γνησίως μονότονη, επομένως υπάρχει μοναδικό $\xi \in (0,1)$

τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \frac{3f\left(\frac{1}{3}\right)}{1 - 3x_1}$ δηλαδή η κλίση της γραφικής παράστασης της f στο σημείο

$M(\xi, f(\xi))$ ισούται με $\frac{3f\left(\frac{1}{3}\right)}{1 - 3x_1}$.

Δ4. i) Οι F, G είναι αρχικές της f στο $(0,2)$ επομένως ισχύει $F'(x) = G'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in (0,2)$ και υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $F(x) = G(x) + c, x \in (0,2)$.

Για $x = x_1$ έχουμε $F(x_1) = G(x_1) + c \Leftrightarrow c = -G(x_1)$

Για $x = x_2$ έχουμε $F(x_2) = G(x_2) - G(x_1) \Leftrightarrow F(x_2) = -G(x_1) \Leftrightarrow G(x_1) + F(x_2) = 0$ που είναι ζητούμενο.

B' τρόπος: Έχουμε $\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = F(x_2) - F(x_1) = G(x_2) - G(x_1)$

Οπότε: $F(x_2) - 0 = 0 - G(x_1) \Leftrightarrow F(x_2) + G(x_1) = 0$.

ii) Έχουμε την εξίσωση : $x_1F(x) + x_2G(x) + 2x - x_1 - x_2 = 0$

Έστω $h(x) = x_1F(x) + x_2G(x) + 2x - x_1 - x_2 = 0, x \in (0,2)$.

Αν $x \in (x_1, x_2)$ τότε $f(x) > 0$ επομένως $F'(x) = G'(x) > 0$ στο (x_1, x_2) . Άρα F, G είναι γνησίως αύξουσες στο $[x_1, x_2]$. Έτσι: $x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) < F(x_2) \Rightarrow 0 < F(x_2)$

και $x_1 < x_2 \Rightarrow G(x_1) < G(x_2) \Rightarrow G(x_1) < 0$

Η h είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

- $h(x_1) = x_1F(x_1) + x_2G(x_1) + x_1 - x_2 = x_2G(x_1) + x_1 - x_2 < 0$
αφού $x_2 > 0, G(x_1) < 0$ και $x_1 - x_2 < 0$
- $h(x_2) = x_1F(x_2) + x_2G(x_2) + x_2 - x_1 = x_1F(x_2) + x_2 - x_1 > 0$
αφού $F(x_2) > 0, x_1 > 0$ και $x_2 - x_1 > 0$.

Επομένως, από το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $\rho \in (x_1, x_2)$ με $h(\rho) = 0$ δηλαδή το ρ είναι ρίζα της αρχικής εξίσωσης.

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $(0,2)$ με $h'(x) = x_1f(x) + x_2f(x) + 2 > 0$, για κάθε $x \in (x_1, x_2)$ αφού $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (x_1, x_2)$ και $x_1, x_2 > 0$.

Επομένως η h είναι γνησίως αύξουσα στο (x_1, x_2) και το ρ είναι μοναδική ρίζα της αρχικής εξίσωσης.