

Πανελλαδικές Εξετάσεις Ημερήσιων Γενικών Λυκείων

Εξεταζόμενο Μάθημα: Μαθηματικά Προσανατολισμού,

Ημερομηνία: Δευτέρα 2 Ιουνίου 2025

Ενδεικτικές Απαντήσεις Θεμάτων

Θέμα Α

A1. Σχολικό βιβλίο, σελίδα 186.

A2. Σχολικό βιβλίο, σελίδα 76.

A3. Σχολικό βιβλίο σελίδα 161.

A4.

- α) Σωστό
- β) Σωστό
- γ) Λάθος
- δ) Λάθος
- ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

B1. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με $f'(x) = 3x^2 + 2ax + 9$ και παρουσιάζει ακρότατο στο σημείο $x_0 = 1$.

Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα Fermat θα ισχύει:

$$f'(1) = 0 \Leftrightarrow 3 + 2a + 9 = 0 \Leftrightarrow a = -6$$

B2. Η συνάρτηση f γράφεται: $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$, $x \in \mathbb{R}$ και η παράγωγός της είναι;
 $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3) = 3(x - 1)(x - 3)$.

Λύνουμε την εξίσωση: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = 3$

και την ανίσωση: $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < 1$ ή $x > 3$. Έτσι κατασκευάζουμε τον παρακάτω πίνακα μονοτονίας:

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
f	↗		↘		↗

Παρατηρούμε ότι για τη συνεχή συνάρτηση f έχουμε:

- η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, 1]$ με
 - $f((-\infty, 0]) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), f(0) \right] = (-\infty, -3]$
 - και $f([0, 1]) = [f(0), f(1)] = [-3, 1]$
- η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[1, 3]$ με $f([1, 3]) = [f(3), f(1)] = [-3, 1]$
- η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[3, +\infty)$ με $f([3, +\infty)) = \left[f(3), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = [-3, +\infty)$

Ισχύει ότι:

- $y = 0 \notin (-\infty, -3] = f((-\infty, 0])$ οπότε συμπεραίνουμε ότι δεν υπάρχει ρίζα της $f(x) = 0$ στο διάστημα αυτό,
- $y = 0 \in (-3, 1] = f((0,1])$ οπότε συμπεραίνουμε ότι υπάρχει μοναδικό $x_1 \in (0,1)$ με $f(x_1) = 0$.

Εναλλακτικά, μπορούμε να βρούμε το σύνολο τιμών $f((-\infty, 1]) = (-\infty, 1]$ και να δείξουμε την ύπαρξη ρίζας με εφαρμογή του θεωρήματος Bolzano στο διάστημα $[0,1]$. Πράγματι, η f είναι συνεχής στο $[0,1]$ με $f(0) \cdot f(1) < 0$, οπότε προκύπτει μια τουλάχιστον ρίζα $x_1 \in (0, 1)$ η οποία λόγω της μονοτονίας της f είναι μοναδική.

- $y = 0 \in [1, 3] = f([1,3])$ οπότε συμπεραίνουμε ότι υπάρχει μοναδικό $x_2 \in [1, 3]$ με $f(x_2) = 0$,
- $y = 0 \in (-3, 1] = f((0,1])$ οπότε συμπεραίνουμε ότι υπάρχει μοναδικό $x_3 \in (-3, 1]$ με $f(x_3) = 0$.

Άρα, η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τρεις θετικές πραγματικές ρίζες.

B3. Η f' είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με $f''(x) = 6x - 12$.

Λύνουμε την εξίσωση: $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$

και την ανίσωση: $f''(x) > 0 \Leftrightarrow x > 2$. Έτσι κατασκευάζουμε τον παρακάτω πίνακα κυρτότητας για την f :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	\emptyset	$+$
f	↘		↗

Παρατηρούμε ότι:

- η f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω ή είναι κοίλη στο διάστημα $(-\infty, 2]$
- η f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ή είναι κυρτή στο διάστημα $[2, +\infty)$
- η C_f παρουσιάζει σημείο καμπής στο $x_4 = 2$, δηλαδή το σημείο $K(2, f(2))$ ή $K(2, -1)$ είναι το μοναδικό σημείο καμπής της C_f .

B4. Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με $g'(x) = f'(x) + 1$, (1).

Οι εξισώσεις των εφαπτομένων των γραφικών παραστάσεων των f, g στα σημεία $A(\xi, f(\xi))$ και $B(\xi, g(\xi))$ είναι αντίστοιχα:

$$(\varepsilon_1): y - f(\xi) = f'(\xi)(x - \xi) \Leftrightarrow y = f(\xi) + f'(\xi)(x - \xi), \quad (3)$$

$$(\varepsilon_2): y - g(\xi) = g'(\xi)(x - \xi) \Leftrightarrow y = g(\xi) + g'(\xi)(x - \xi), \quad (4)$$

Για να βρούμε το σημείο τομής των $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων (3) και (4) από όπου προκύπτει:

$$f(\xi) + f'(\xi)(x - \xi) = g(\xi) + g'(\xi)(x - \xi) \Leftrightarrow f(\xi) - g(\xi) = (g'(\xi) - f'(\xi))(x - \xi)$$

$$\stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} f(\xi) - (f(\xi) + \xi) = (f'(\xi) + 1 - f'(\xi))(x - \xi) \Leftrightarrow -\xi = x - \xi \Leftrightarrow x = 0$$

Οπότε $y_0 = f(\xi) - \xi f'(\xi)$. Άρα, οι εξισώσεις των εφαπτομένων των γραφικών παραστάσεων των f, g στα σημεία $A(\xi, f(\xi))$ και $B(\xi, g(\xi))$ τέμνονται στο σημείο $M(0, y_0)$ που είναι σημείο του άξονα $y'y$.

ΘΕΜΑ Γ

Η συνάρτηση f έχει τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} e^x \cdot \eta\mu x, & x < 0 \\ \sqrt{x^2 + x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

Γ1. Είναι: $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (e^x \cdot \eta\mu x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x^2 + x} = 0$ και $f(0) = 0$.

Άρα η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^2 + x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{1 + \frac{1}{x}} = +\infty$$

διότι $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$. Επομένως, δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

Γ2.

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \cdot \eta\mu x$

Ισχύει ότι $-1 \leq \eta\mu x \leq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα, $-e^x \leq e^x \cdot \eta\mu x \leq e^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Επειδή $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-e^x) = 0$ τότε, από κριτήριο παρεμβολής έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \cdot \eta\mu x = 0$$

Άρα, η $y = 0$ είναι ασύμπτωτη στο $-\infty$.

- Είναι: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = 1$

Άρα, $\lambda = 1$

και

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \lambda x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + x} - x)(\sqrt{x^2 + x} + x)}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1 \right)} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Άρα, $\beta = \frac{1}{2}$. Τελικά, η $y = x + \frac{1}{2}$ είναι ασύμπτωτη στο $+\infty$. Κατακόρυφες ασύμπτωτες δεν έχει, καθώς είναι συνεχής στο \mathbb{R} .

Γ3. Αρκεί να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = x + \frac{1}{2}$ έχει τουλάχιστον μία λύση στο $(-\pi, 0)$. Έστω η $\varphi(x) = f(x) - x - \frac{1}{2}$, $x \leq 0$. Η φ συνεχής στο $[-\pi, 0]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων, με $\varphi(-\pi) = f(-\pi) + \pi - \frac{1}{2} = \pi - \frac{1}{2} > 0$
 $\varphi(0) = f(0) - 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} < 0$, δηλαδή $\varphi(0) \cdot \varphi(-\pi) < 0$
 Άρα, από θεώρημα *Bolzano* υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (-\pi, 0)$ τέτοιο ώστε $\varphi(\xi) = 0$, δηλαδή η C_f τέμνει την $y = x + \frac{1}{2}$ σε τουλάχιστον ένα σημείο με τετμημένη $\xi \in (-\pi, 0)$.

Γ4. Ο ρυθμός μεταβολής του $y = y(t)$ δεν ορίζεται για $x = x(t) = 0$, επειδή η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0. Επομένως, θεωρούμε $x = x(t) > 0$.

Αρκεί να εξετάσουμε αν η εξίσωση $y'(t_0) = x'(t_0)$ έχει λύση $t_0 \geq 0$. Ισχύει ότι

$$y(t) = \sqrt{x^2(t) + x(t)}, x(t) > 0.$$

Άρα $y'(t) = \frac{1}{2\sqrt{x^2(t)+x(t)}} \cdot (2x(t) \cdot x'(t) + x'(t))$ οπότε

$$\frac{x'(t_0) \cdot 2x(t_0) + 1}{2\sqrt{x^2(t_0) + x(t_0)}} = x'(t_0) \xleftrightarrow{x'(t_0) > 0} \frac{2 \cdot x(t_0) + 1}{2\sqrt{x^2(t_0) + x(t_0)}} = 1 \xleftrightarrow{x'(t_0) > 1}$$

$$2\sqrt{x^2(t_0) + x(t_0)} = 2x(t_0) + 1 \Leftrightarrow 4x^2(t_0) + 4x(t_0) = 4x(t_0) + 1 \Leftrightarrow 0 = 1 \text{ Αδύνατη.}$$

Άρα, δεν υπάρχει τέτοιο σημείο $M(x(t), y(t_0))$ ώστε $y'(t_0) = x'(t_0)$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η g είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$$g'(x) = \frac{F'(x)x^{\ln x} - (x^{\ln x})'F(x)}{(x^{\ln x})^2} = \frac{f(x)x^{\ln x} - x^{\ln x} 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} \cdot F(x)}{(x^{\ln x})^2}$$

$$= \frac{x^{\ln x} \left(f(x) - 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} \cdot F(x) \right)}{x^{2 \ln x}} = 0, \text{ λόγω της δοσμένης σχέσης.}$$

Επομένως από γνωστό θεώρημα η συνάρτηση g είναι σταθερή στο $(0, +\infty)$.

Δ2. i) Α' τρόπος: Στην αρχική σχέση για $x = 1$ έχουμε $f(1) = 2F(1) \ln 1 = 0$. Η εφαπτομένη της C_f στο $M(1, f(1))$ είναι παράλληλη στην $y = 2x$ επομένως έχει συντελεστή διεύθυνσης $f'(1) = 2$. Έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{f(x) - f(1)}{x - 1}}{\frac{\ln x}{x - 1}} = \frac{f'(1)}{1} = 2, \quad \text{αφού} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 1.$$

Β' τρόπος: Στην αρχική σχέση για $x = 1$ έχουμε $f(1) = 2F(1) \ln 1 = 0$. Οπότε το όριο έχει απροσδιοριστία 0/0 επομένως εφαρμόζοντας κανόνες D.I'H. έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{\frac{1}{x}} = f'(1) = 2$$

όπου στο τελευταίο βήμα χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι η

$$f'(x) = \frac{\left(2f(x) \ln x + 2F(x) \cdot \frac{1}{x} - f(x)\right)}{x}$$

είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

Γ' τρόπος: Έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2F(x) \ln x}{x \ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2F(x)}{x} = 2F(1), \text{ αφού η } F \text{ είναι συνεχής.}$$

Στην αρχική σχέση για $x = 1$ έχουμε $f(1) = 2F(1) \ln 1 = 0$. Επίσης παραγωγίζοντας την αρχική έχουμε: $f(x) + xf'(x) = 2f(x) \ln x + 2F(x) \cdot \frac{1}{x}, x > 0$

Οπότε θέτοντας $x = 1$ λαμβάνουμε: $f(1) + f'(1) = 0 + 2F(1) \Leftrightarrow 2F(1) = f'(1)$.

Η εφαπτομένη της C_f στο $M(1, f(1))$ είναι παράλληλη στην $y = 2x$ επομένως έχει συντελεστή διεύθυνσης $f'(1) = 2$. Έτσι, έχουμε $2F(1) = 2 \Leftrightarrow F(1) = 1$.

Τελικά το αρχικό όριο ισούται με $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\ln x} = 2F(1) = 2$.

ii) Στην αρχική σχέση για $x = 1$ έχουμε $f(1) = 2F(1) \ln 1 = 0$. Επίσης παραγωγίζοντας την αρχική έχουμε: $f(x) + xf'(x) = 2f(x) \ln x + 2F(x) \cdot \frac{1}{x}, x > 0$

Οπότε θέτοντας $x = 1$ λαμβάνουμε: $f(1) + f'(1) = 0 + 2F(1) \Leftrightarrow 2F(1) = f'(1)$.

Η εφαπτομένη της C_f στο $M(1, f(1))$ είναι παράλληλη στην $y = 2x$ επομένως έχει συντελεστή διεύθυνσης $f'(1) = 2$. Έτσι, έχουμε $2F(1) = 2 \Leftrightarrow F(1) = 1$.

Β τρόπος: Η F είναι συνεχής επομένως

$$F(1) = \lim_{x \rightarrow 1} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{xf(x)}{2 \ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{2} \cdot \frac{f(x)}{\ln x} = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1.$$

Η συνάρτηση g είναι σταθερή επομένως υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $g(x) = c \Leftrightarrow F(x) = cx^{\ln x}, x > 0$. Για $x = 1$ έχουμε $F(1) = c \cdot 1^0 \Leftrightarrow c = F(1) = 1$. Άρα $F(x) = x^{\ln x}, x > 0$.

Δ3. Η συνάρτηση F είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $F'(x) = (e^{(\ln x)^2})' = x^{\ln x} 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} = x^{\ln x - 1} \cdot 2 \ln x$. Επομένως το πρόσημο της F' εξαρτάται μόνο από το $\ln x$, δηλαδή:

$$F'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1 \text{ και } F'(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1.$$

Επομένως η F είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $(0, 1]$.

$$\text{Η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα: } F(x^2) - F(x) = -(x-1)^2 \leq 0 \quad (1)$$

Το $x = 1$ είναι προφανής ρίζα της εξίσωσης.

- Αν $x > 1$, τότε $x^2 > x > 1 \stackrel{F\uparrow}{\Rightarrow} F(x^2) > F(x) \Rightarrow F(x^2) - F(x) > 0$ επομένως η εξίσωση (1) είναι αδύνατη στο $(1, +\infty)$.
- Αν $0 < x < 1$, τότε $0 < x^2 < x < 1 \stackrel{F\downarrow}{\Rightarrow} F(x^2) > F(x) \Rightarrow F(x^2) - F(x) > 0$ επομένως η εξίσωση (1) είναι αδύνατη στο $(1, +\infty)$.

Τελικά μοναδική λύση της αρχικής εξίσωσης είναι το $x = 1$.

Δ4. Έχουμε $E = \int_1^e |F(x)| dx$. Επίσης: $1 \leq x \leq e \stackrel{F\uparrow}{\Rightarrow} F(1) \leq F(x) \leq F(e) \Rightarrow 1 \leq F(x) \leq e$

και οι ισότητες ισχύουν μόνο για $x = 1, x = e$, αντίστοιχα. Επομένως για το εμβαδόν E έχουμε

$$E = \int_1^e |F(x)| dx = \int_1^e F(x) dx = \int_1^e e^{(\ln x)^2} dx$$

Έχουμε $e^{(\ln x)^2} \geq \ln^2 x + 1, x > 0$ (αν θέσουμε στη γνωστή ανισότητα όπου x το $\ln^2 x$). Η ισότητα ισχύει μόνο για $\ln^2 x = 0 \Leftrightarrow x = 1$ επομένως

$$\int_1^e e^{(\ln x)^2} dx > \int_1^e (\ln^2 x + 1) dx$$

$$\begin{aligned} E &> \int_1^e (\ln^2 x + 1) dx = \int_1^e (x)' \ln^2 x dx + [x]_1^e = [x \ln^2 x]_1^e - \int_1^e x \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} dx + [x]_1^e \\ &= (e - 0) - 2 \int_1^e (x)' \cdot \ln x dx + (e - 1) = e - 2[x \ln x]_1^e + 2 \int_1^e x \cdot \frac{1}{x} dx + (e - 1) \\ &= e - 2(e - 0) + 2[x]_1^e + (e - 1) = e - 2e + 2(e - 1) + (e - 1) = 2e - 3 \tau. \mu. \end{aligned}$$